1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°1 : *LIMITE D'UNE FONCTION*

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Solution Montrons que : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ \ (\forall x \in D_f)\ 0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$?

On a : $|f(x)| = \left|\frac{x}{x+1}\right| = \frac{1}{|x+1|}|x|$: On va ajouter une condition pour pouvoir majorer : $\frac{1}{|x+1|}|x|$

Soit : $x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ donc : $-\frac{1}{2} \prec x \prec \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}+1 \prec x+1 \prec \frac{1}{2}+1 \Rightarrow \frac{1}{2} \prec x+1 \prec \frac{3}{2}$

Donc : $|f(x)| = \left|\frac{x}{x+1}\right| \le 2|x|$ si $x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$

Soit $\varepsilon \succ 0$ on cherche $\alpha \succ 0$ tel que : $0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Pour avoir $|f(x)| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $2|x| \prec \varepsilon$ et $|x| \prec \frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $|x| \prec \frac{\varepsilon}{2}$ et $|x| \prec \frac{1}{2}$

Il suffit de prendre α le plus petit des nombres : $\frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\alpha = \inf\left(\frac{\varepsilon}{2};\frac{1}{2}\right)$

Donc : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ \left(\alpha = \inf\left(\frac{\varepsilon}{2};\frac{1}{2}\right)\right) 0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Donc : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Exercice2 : Soit la fonction : $f : x \mapsto x^2 + 7x - 8$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

Solution Montrons que : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ \ (\forall x \in D_f)\ |x-1| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$?

On a : $|f(x)| = |x^2 + 7x - 8| = |(x-1)(x+8)| = |x-1||x+8|$

On va ajouter une condition pour pouvoir majorer : $|x-1||x+8|$

Soit : $x \in]0;2[$ donc : $0 \prec x \prec 2 \Rightarrow 8 \prec x+8 \prec 10 \Rightarrow -10 \prec x+8 \prec 10 \Rightarrow |x+8| \prec 10$

Donc : $|f(x)| \le 10|x-1|$ si $x \in]0;2[$

Soit $\varepsilon \succ 0$ on cherche $\alpha \succ 0$ tel que : $|x-1| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Pour avoir $|f(x)| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $10|x-1| \prec \varepsilon$ c'est à dire : $|x-1| \prec \frac{\varepsilon}{10}$ et $|x-1| \prec 1$

Il suffit de prendre α le plus petit des nombres : $\frac{\varepsilon}{10}$ et 1 c'est-à-dire : $\alpha = \inf\left(\frac{\varepsilon}{10};1\right)$

Donc : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ \left(\alpha = \inf\left(\frac{\varepsilon}{10};1\right)\right) |x-1| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Donc : $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

Exercice3 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{3x^2+1}{x^4}$

PROF: ATMANI NAJIB

Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=+\infty$

Solution Montrons que : $\forall A\succ 0\ \exists\alpha\succ 0\ (\forall x\in D_f)\ 0<|x|<\alpha\Rightarrow f(x)\succ A$?

On a : $f\left(x\right)=\dfrac{3x^2+1}{x^4}=\dfrac{3x^2}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}=\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}\succ\dfrac{3}{x^2}$ si $x\neq 0$

Soit $A\succ 0$ on cherche $\alpha\succ 0$ tel que : $0<|x|<\alpha\Rightarrow f(x)\succ A$

Pour avoir $f(x)\succ A$ il suffit d'avoir $\dfrac{3}{x^2}\succ A$ c'est à dire : $x^2\prec\dfrac{3}{A}$ c'est à dire : $|x|\prec\sqrt{\dfrac{3}{A}}$

Il suffit de prendre $\alpha=\sqrt{\dfrac{3}{A}}$

Donc : $\forall A\succ 0\ \exists\alpha\succ 0\ \left(\alpha=\sqrt{\dfrac{3}{A}}\right) 0<|x|<\alpha\Rightarrow f(x)\succ A$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=+\infty$

Exercice4 : 1) Monter que : $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)=0$

2) Monter que : $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x^4}\right)=0$

3) a) Monter que : $\forall x\in\left]-1;1\right[$: $\left|x^2+5x\right|\leq 6|x|$

b) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} x^2+5x$

Solution : 1) $x\in\mathbb{R}^*$: $\left|\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right|\leq 1$ donc : $\left|x^2\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right|\leq x^2$ et on a $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)=0$

2) Montons que : $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x^4}\right)=0$

$x\in\mathbb{R}^*$: $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x^4}\right)\right|\leq 1$ donc : $\left|x\sin\left(\dfrac{1}{x^4}\right)-0\right|\leq|x|$ et on a $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x^4}\right)=0$

3)a) On a : $\left|x^2+5x\right|=\left|x\left(x+5\right)\right|=|x||x+5|$ et puisque : $x\in\left]-1;1\right[$ alors : $4\prec x+5\prec 6$

Alors : $|x+5|\prec 6$ donc $\left|x^2+5x\right|\leq 6|x|$

b) Puisque : $\lim\limits_{x\to 0} 6|x|=0$ alors : $\lim\limits_{x\to 0} x^2+5x$

Exercice5 : Déterminer : $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\cos x}{x^3-1}$

Solution : Soit : $x\in\mathbb{R}^{*-}$:

Donc : $\left|\dfrac{\cos x}{x^3-1}\right|=\left|\dfrac{1}{x^3-1}\right|\times|\cos x|\leq\left|\dfrac{1}{x^3-1}\right|$ car $|\cos x|\leq 1$

Donc : $\left|\dfrac{\cos x}{x^3-1}-0\right|\leq\dfrac{1}{1-x^3}\leq-\dfrac{1}{x^3}\ \ \forall x\in\mathbb{R}^{*-}$

PROF. ATMANI NAJIB

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{x^3}=0$ Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^3-1}=0$

Exercice6 : Monter que : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}+2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$

Solution : Soit : $x\in\mathbb{R}^*$ $-2\le\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ donc : $\frac{1}{x}\le\frac{1}{x}+2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et on a $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}+2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$

Exercice7 : Soit la fonction : $f:x\mapsto\frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$

1)Monter que : $\forall x\in D_f$ $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{2}|x+1|$

2) En déduire : $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$

Solution : Soit $x\in[-2;-1[\cup]-1;+\infty[$; $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{x+2}+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{|x+1|}{2\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2}$

Et on a $\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2\ge1$ donc : $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{2}|x+1|$; $\forall x\in D_f$

2) Puisque : $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{2}|x+1|$ et $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{2}|x+1|=0$ Alors : $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\frac{1}{2}$

Exercice8 : Soit la fonction $f:x\mapsto\frac{|x-1|x}{x^2-1}$

1) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}f(x)$

2) La fonction f admet-elle une limite en : $x_0=1$?

Solution :1) Soit $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $x\succ1$: $f(x)=\frac{(x-1)x}{(x-1)(x+1)}=\frac{x}{x+1}$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$

Si : $x\prec1$: $f(x)=\frac{-(x-1)x}{(x-1)(x+1)}=-\frac{x}{x+1}$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}-\frac{x}{x+1}=-\frac{1}{2}$

2)Puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}f(x)\ne\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}f(x)$ alors f n'admet pas de limite au point : $x_0=1$

Exercice9 : Soit la fonction $f:x\mapsto\frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$; Etudier la limite de f en $x_0=-1$

Solution : Déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}}f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}}f(x)$?

Soit $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $-1\prec x\prec1$: $f(x)=\frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=-\frac{x+1}{x-1}$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} -\frac{x+1}{x-1}=0$

Si : $x\prec -1$: $f(x)=\frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=\frac{x+1}{x-1}$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} \frac{x+1}{x-1}=0$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)=0$: par suite $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$

Exercice10 : Soit la fonction : $f:x\mapsto \frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}$; déterminer : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ on a $1+\sqrt{x}\ge\sqrt{x}$ et $0\le 1+\sin x\le 2$ donc $\left|\frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}\right|\le\frac{2}{\sqrt{x}}$

Donc : $|f(x)|\le\frac{2}{\sqrt{x}}$ et on a $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$ par suite : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

Exercice11 : Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x^4\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}^*$: on a $-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1$ et $x^2+x^4\ge 0$ donc : $-x^2-x^4\le\left(x^2+x^4\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le x^2+x^4$

et puisque : $\lim\limits_{x\to 0} x^2+x^4=\lim\limits_{x\to 0} -x^2-x^4=0$

Alors : $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x^4\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$ (d'après gendarmes)

Exercice12 : Soit la fonction : $f:x\mapsto x+\sin x-1$ déterminer : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $-1\le\sin x\le 1$ donc : $x-2\le f(x)\le x$ et puisque : $\lim\limits_{x\to -\infty} x=-\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$

Exercice13 : Déterminer : $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{E(x)}{x}$

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}^*$: on a $x-1\prec E(x)\le x$ donc : $1-\frac{1}{x}\le\frac{E(x)}{x}\le 1$

et puisque : $\lim\limits_{x\to +\infty} 1-\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0} 1=1$

Alors : $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{E(x)}{x}=1$ (d'après gendarmes)

Exercice14 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} x^8$ 2) $\lim\limits_{x\to 2} 3x^2+2x+1$ 3) $\lim\limits_{x\to -1} 5x^2+2x-8$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x}{2x^3+3x-4}$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}+3}{x^2+3x+2}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x-1}{3x^2-x}$ 7) $\lim\limits_{x\to 1} 3x^2+x+1+\frac{x+1}{x^2+2}-\sqrt{3x+1}$ 8) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\cos x}{\frac{x}{\pi}+2}\times\sqrt{x}$

Solutions : 1) $\lim\limits_{x\to 0} x^8=?$ Et bien on remplace tout simplement le x par 0 :

$\lim\limits_{x\to 0} x^8=0^8=0$

PROF: ATMANI NAJIB

2) $\lim\limits_{x\to 2} 3x^2+2x+1=?$ Et bien on remplace tout simplement le x par 2 :

$\lim\limits_{x\to 2} 3x^2+2x+1=3\times 2^2+2\times 2+1=17$

3) $\lim\limits_{x\to -1} 5x^2+2x-8=?$ Et bien on remplace tout simplement le x par -1 :

$\lim\limits_{x\to -1} 5x^2+2x-8=5\times(-1)^2+2\times(-1)-8=-5$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x}{2x^3+3x-4}=\dfrac{3\times 1^2-1}{2\times 1^3+3\times 1-4}=\dfrac{2}{1}=2$ (on remplace tout simplement le x par 1)

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}+3}{x^2+3x+2}=\dfrac{\sqrt{4\times 2+1}+3}{2^2+3\times 2+2}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x-1}{3x^2-x}=\dfrac{5\times 1-1}{3(-1)^2-(-1)}=\dfrac{4}{3+1}=1=l$

7) $\lim\limits_{x\to 1} 3x^2+x+1+\dfrac{x+1}{x^2+2}-\sqrt{3x+1}$ (on remplace tout simplement le x par 1)

$\lim\limits_{x\to 1} 3x^2+x+1+\dfrac{x+1}{x^2+2}-\sqrt{3x+1}=3\times(1)^2+1+1+\dfrac{1+1}{1^2+2}-\sqrt{3\times 1+1}=\dfrac{11}{3}$

8) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos x}{\dfrac{x}{\pi}+2}\times\sqrt{x}=\dfrac{\cos\pi}{\dfrac{\pi}{\pi}+2}\times\sqrt{\pi}=\dfrac{-1}{3}\times\sqrt{\pi}=-\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}$

Comme tu le vois il n'y a aucune difficulté, on remplace le x et on calcule !
Bon ça ce sont des cas simples, mais ce n'est pas tout le temps comme ça.

Exercice15 : Soient les fonctions tels que : $f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$ et $g(x)=\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

1)Déterminer : a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2)Déterminer : $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

Solution :1) a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$

$\lim\limits_{x\to 2} 2x+1=5$ et $\lim\limits_{x\to 2} -3x^2+x=-10$ donc : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\sqrt{5}\times(-10)=-10\sqrt{5}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x+1=\lim\limits_{x\to +\infty} 2x=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty$ et on a : $\lim\limits_{x\to +\infty} -3x^2+x=\lim\limits_{x\to +\infty} -3x^2=-\infty$ Donc : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$? et $g(x)=\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$ On a : $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}+1=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-2x^2}{x^2}=-2$ donc : $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$

Exercice16 : Calculer les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^2-x+4$ 2) $\lim\limits_{x\to -\infty} 5x^2-2x+4$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} -2x^3+3x+2024$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x-3)(1023-x)^3$ 5) $\lim\limits_{x\to -\infty}(1-2x^2)(1+3x)^2$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^3-(1-x)^2(x+2)$ 7) $\lim\limits_{x\to +\infty} 4x^2-(2x-1)(2x+1)$ 8) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(2x-1)^{2025}(x-3)$

9) $\lim\limits_{x\to +\infty}|2x-1|-3x$ 10) $\lim\limits_{x\to -\infty} x+|2+x|$ 11) $\lim\limits_{x\to +\infty}|3x^2-4x+1|$ 12) $\lim\limits_{x\to -\infty}|x^3-3x|$

PROF: ATMANI NAJIB

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^2+1\right)^3}{x^2+12x^3}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2-x+4=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}5x^2-2x+4=\lim\limits_{x\to-\infty}5x^2=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}-2x^3+3x+2024=\lim\limits_{x\to+\infty}-2x^3=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)(1023-x)^3=\lim\limits_{x\to+\infty}2x\times(-x)^3=\lim\limits_{x\to+\infty}-2x\times x^3=\lim\limits_{x\to+\infty}-2x^4=-\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x^2)(1+3x)^2$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}1-2x^2=\lim\limits_{x\to-\infty}-2x^2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+3x)^2=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x^2)(1+3x)^2=-\infty$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3-(1-x)^2(x+2)$

On a : $2x^3-(1-x)^2(x+2)=2x^3-(x^2-2x+1)(x+2)=x^3+3x-2$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3-(1-x)^2(x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3+3x-2=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}4x^2-(2x-1)(2x+1)$: On a : $4x^2-(2x-1)(2x+1)=4x^2-(4x^2-1)=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}4x^2-(2x-1)(2x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}1=\boxed{1}$

8) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)^{2025}(x-3)$: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)^{2025}=0$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}x-3=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$

Donc : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)^{2025}(x-3)=0\times\left(-\frac{5}{2}\right)=0$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}|2x-1|-3x$:

Puisqu'on cherche la limite en $+\infty$ on peut supposer que : $x\succ\frac{1}{2}$ alors : $|2x-1|=2x-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}|2x-1|-3x=\lim\limits_{x\to+\infty}2x-1-3x=\lim\limits_{x\to+\infty}-1-x=\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$

10) $\lim\limits_{x\to-\infty}x+|2+x|$

Puisqu'on cherche la limite en $-\infty$ on peut supposer que : $x\prec-2$ alors : $|2+x|=-x-2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x+|2+x|=\lim\limits_{x\to-\infty}x-2-x=\lim\limits_{x\to-\infty}-2=\boxed{-2}$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|3x^2-4x+1\right|$:

Méthode1 : Etudions le signe de : $3x^2-4x+1$

$\Delta=16-12=4$ Alors : $x_1=\frac{4+2}{6}=1$ et $x_2=\frac{4-2}{6}=\frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x2-4x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où : si $x\geq1$: $\left|3x^2-4x+1\right|=3x^2-4x+1$

PROF: ATMANI NAJIB

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|3x^2-4x+1\right| = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2-4x+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$

Méthode2 : On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2-4x+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|3x^2-4x+1\right| = \left|+\infty\right| = +\infty$

12) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left|x^3-3x\right|$: Méthode1 : Etudions le signe de : $x^3-3x = x\left(x^2-3\right)$

Le tableau de signe donne : $x^3-3x \le 0$ si $x \in \left]-\infty;\sqrt{3}\right]$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left|x^3-3x\right| = \lim\limits_{x\to-\infty} -\left(x^3-3x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3+3x = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$

Méthode2 : On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-3x = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left|x^3-3x\right| = \left|-\infty\right| = +\infty$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^2+1\right)^3}{x^2+12x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^2\right)^3}{12x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^6}{12x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{12} = +\infty$

Exercice17 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x-5}{\sqrt{x+7}}$ 2) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$ 3) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3x+1}{5x-10}$ *et* $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{3x+1}{5x-10}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} -6x^2-3x+1$ 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^5+x^2+2}{5x^3+x}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{20x^3-7x^2+x}{10x^4-3x-6}$

7) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3x-8}{2x-4}$ et $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{3x-8}{2x-4}$ 8) $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{-5x^2+1}{x+2}$ et $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{-5x^2+1}{x+2}$

9) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{5x-20}{-2x+4}$ et $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{5x-20}{-2x+4}$ 10) $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{3x+1}{2x-6}$ et $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{3x+1}{2x-6}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x-5}{\sqrt{x+7}}$; On a : $\lim\limits_{x\to2} 4x-5 = 3$ et $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{x+7} = \sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$

Donc : $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x-5}{\sqrt{x+7}} = \dfrac{3}{3} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$; On a : $\lim\limits_{x\to5} x^2-25 = 5^2-25 = 25-25 = 0$ et $\lim\limits_{x\to5} x-5 = 0$

Donc Formes indéterminée : $"\dfrac{0}{0}"$

$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x-5} = \lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-5^2}{x-5} = \lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim\limits_{x\to5} x+5 = 5+5 = 10$

3) $a)$ $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3x+1}{5x-10}$

On a : $\lim\limits_{x\to2^+} 5x-10 = 0$ et $\lim\limits_{x\to2^+} 3x+1 = 6+1 = 7$

On va étudier le signe de : $5x-10$

$5x-10 = 0 \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = \dfrac{10}{5} \Leftrightarrow x = 2$

PROF ATMANI NAJIB

x	$-\infty$ $\quad 2 \quad$ $+\infty$
$5x-10$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

On a donc : $\lim\limits_{x \to 2^+} 5x - 10 = 0^+$

Donc $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x+1}{5x-10} = +\infty$

$b) \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x+1}{5x-10} = ?$ On a : $\lim\limits_{x \to 2^-} 5x - 10 = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} 3x + 1 = 6 + 1 = 7$

Donc $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x+1}{5x-10} = -\infty$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} -6x^2 - 3x + 1 = ?$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -6x^2 - 3x + 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} -6x^2 = -\infty$

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^5 + x^2 + 2}{5x^3 + x} = ?$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^5 + x^2 + 2}{5x^3 + x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^5}{5x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^5}{x^3} = \lim_{x \to -\infty} x^{5-3} = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{20x^3 - 7x^2 + x}{10x^4 - 3x - 6} = ?$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{20x^3 - 7x^2 + x}{10x^4 - 3x - 6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{20x^3}{10x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \times 10x \times x \times x}{10 \times x \times x \times x \times x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{20x^3 - 7x^2 + x}{10x^4 - 3x - 6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0^+$$

7) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x-8}{2x-4}$: On a : $\lim\limits_{x \to 2^+} 3x - 8 = 3 \times 2 - 8 = \boxed{-2}$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} 2x - 4 = 2 \times 2 - 4 = 4 - 4 = 0$

On va étudier le signe de : $2x - 4$

$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{2} \Leftrightarrow x = 4$

x	$-\infty$ $\quad 2 \quad$ $+\infty$
$2x-4$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

On a donc : $\lim\limits_{x \to 2^+} 2x - 4 = \boxed{0^+}$

Donc $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x-8}{2x-4} = -\infty$

b) On a donc : $\lim\limits_{x \to 2^-} 2x - 4 = \boxed{0^-}$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} 3x - 8 = 3 \times 2 - 8 = \boxed{-2}$

Donc $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x-8}{2x-4} = +\infty$

8) a) $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{-5x^2+1}{x+2}$

PROF: ATMANI NAJIB

On a : $\lim\limits_{x\to 2^+} -5x^2+1=-5\times(-2)^2+1=\boxed{-19}$ et $\lim\limits_{x\to -2^+} x+2=-2+2=0$

On va étudier le signe de : $x+2$

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$

On a donc : $\lim\limits_{x\to -2^+} x+2=\boxed{0^+}$

Donc $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{-5x^2+1}{x+2}=-\infty$

b) On a donc : $\lim\limits_{x\to -2^-} x+2=\boxed{0^-}$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} -5x^2+1=-5\times(-2)^2+1=\boxed{-19}$

Donc $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{-5x^2+1}{x+2}=+\infty$

9) a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4}$

On a : $\lim\limits_{x\to 2^+} -5x+20=-5\times 2+20=\boxed{10}$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} -2x+4=-4+4=0$

On va étudier le signe de : $-2x+4$

$-2x+4=0 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2x+4$	$+$	0	$-$

On a donc : $\lim\limits_{x\to 2^+} -2x+4=\boxed{0^+}$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} -5x+20=\boxed{10}$

Donc $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4}=+\infty$

b) On a donc : $\lim\limits_{x\to 2^-} -2x+4=\boxed{0^-}$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} -5x+20=\boxed{10}$

Donc $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{5x-20}{-2x+4}=-\infty$

10) a) On a : $\lim\limits_{x\to 3^+} 3x+1=3\times 3+1=10$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} 2x-6=2\times 3-6=6-6=0$

On va étudier le signe de : $2x-6$

$2x-6=0 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=\frac{6}{2} \Leftrightarrow x=3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$2x-6$	$-$	0	$+$

On a donc : $\lim\limits_{x\to 3^+} 2x-6=0^+$

Donc $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{3x+1}{2x-6}=+\infty$

b) On a : $\lim\limits_{x\to 3^-} 3x+1=3\times 3+1=10$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} 2x-6=2\times 3-6=6-6=0$

On a donc : $\lim\limits_{x\to 3^-} 2x-6=0^-$

Donc $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{3x+1}{2x-6}=-\infty$

PROF: ATMANI NAJIB

Remarque :1) Eviter d'écrire ces expressions qui n'ont pas de sens mathématique : $\frac{?}{0^+}$ et $\frac{?}{0^-}$

2)Ne pas utiliser +∞ ou −∞ dans les opérations dans $\mathbb{R}$ (+∞ et −∞ ne sont pas des réels)

Exercice18 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x^3+2x^2+x-2}{-x^2+5x-6}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+2x-3}{x^2+2x-3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3+x-2}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x^3+2x^2+x-2}{-x^2+5x-6}$

On a $\lim\limits_{x\to 2}-x^3+2x^2+x-2=0$ et $\lim\limits_{x\to 2}-x^2+5x-6=0$ On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

→2 est racine du polynôme : $-x^3+2x^2+x-2$ donc : $-x^3+2x^2+x-2$ est divisible par $x-2$

La division euclidienne de $-x^3+2x^2+x-2$ par $x-2$ donne : $-x^3+2x^2+x-2=(x-2)(1-x^2)$

→2 est racine du polynôme : $-x^2+5x-6$ donc : $-x^2+5x-6$ est divisible par $x-2$

La division euclidienne de $-x^2+5x-6$ par $x-2$ donne : $-x^2+5x-6=(x-2)(-x+3)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{-x^3+2x^2+x-2}{-x^2+5x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(1-x^2)}{(x-2)(-x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{1-x^2}{-x+3}=\boxed{-3}$$

2) 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+2x-3}{x^2+2x-3}$

On a $\lim\limits_{x\to 1}x^3+2x-3=0$ et $\lim\limits_{x\to 1}x^2+2x-3=0$ On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

On a : →1 est racine du polynôme : x^3+2x-3 donc : x^3+2x-3 est divisible par $x-1$

La division euclidienne de x^3+2x-3 par $x-1$ donne : $x^3+2x-3=(x-1)(x^2+x+3)$

→1 est racine du polynôme : x^2+2x-3 donc : x^2+2x-3 est divisible par $x-1$

La division euclidienne de x^2+2x-3 par $x-1$ donne : $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+2x-3}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+3)}{(x-1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+3}{x+3}=\frac{5}{4}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3+x-2}$; $\lim\limits_{x\to -1}x^2-1=0$ et $\lim\limits_{x\to -1}x^3+x-2=0$ On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

En utilisant la division euclidienne : $x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+2}=\frac{1}{2}$$

Exercice19 : Déterminer les limites suivantes :1) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-\sqrt{1+x}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}+3x$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{x+1}}{x}$

Solution :1) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-\sqrt{1+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}2-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=2$

PROF: ATMANI NAJIB

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}+3x=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\frac{\sqrt{2-x}}{x}+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}+3\right)=-\infty$ car : $\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}+3=-0+3=3$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{x+1}}{x}$: On utilise le conjugué du numérateur, on aura :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1+3x-x-1}{x\left(\sqrt{1+3x}+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+3x}+\sqrt{x+1}}=1$$

Exercice20 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$ 2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x}{1-\sqrt{x}}$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$

On a : $\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}=\frac{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=\frac{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{1^2-\sqrt{x+1}^2}=\frac{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{1^2-x-1}=\frac{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{-x}=-1-\sqrt{x+1}$

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to0}-1-\sqrt{x+1}=-1-1=-2$$

2) $\frac{x^2-x}{1-\sqrt{x}}=\frac{x(x-1)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}=\frac{x(x-1)\left(1+\sqrt{x}\right)}{-(x-1)}=-x\left(1+\sqrt{x}\right)$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{1-\sqrt{x}}=\lim_{x\to1}-x\left(1+\sqrt{x}\right)=-1$$

3) $\frac{2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}}{x}=\frac{\left(2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}\right)\left(2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}\right)}{x\left(2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}\right)}=\frac{\left(\left(2\sqrt{x+1}\right)^2-\sqrt{x+4}^2\right)}{x\left(2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}\right)}=\frac{4(x+1)-(x+4)}{x\left(2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}\right)}$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{4x+4-x-4}{x\left(2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{3x}{x\left(2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{3}{2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}}=\frac{3}{4}$$

4) $\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}}=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{\sqrt{1+x^2}^2-\sqrt{1-x^2}^2}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$

$$=\frac{1+x^2-1+x^2}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{2x^2}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$=\frac{2x^2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-2x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{2x^2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}^2-\sqrt{1-2x}^2\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

PROF: ATMANI NAJIB

$$=\frac{2x^2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}{(x+1-1+2x)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{2x^2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}{3x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{2}{3}x\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}}=\lim_{x\to0}\frac{2}{3}x\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=0$$

Exercice21 : Etudier les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+|x-2|-4}{x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{|x^3-x|}{x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{3+x^2}-2}{|x-1|}$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x|x|}{\sqrt{1+x^2}-1}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+|x-2|-4}{x-2}$ On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

a) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x^2+|x-2|-4}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x^2+x-2-4}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x^2-4+x-2}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{(x-2)(x+2)+x-2}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x^2+|x-2|-4}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}x+3=5$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{x^2+|x-2|-4}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{x^2-(x-2)-4}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{(x-2)(x+2)-(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}x+1=3$

Et puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x^2+|x-2|-4}{x-2}\neq\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{x^2+|x-2|-4}{x-2}$ Alors : la fonction $x\mapsto\frac{x^2+|x-2|-4}{x-2}$ n'admet pas de limites en 2

2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{|x^3-x|}{x-1}$; On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

a) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{|x^3-x|}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{|x(x-1)(x+1)|}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}x(x+1)=2$

a) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{|x^3-x|}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{|x(x-1)(x+1)|}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{-x(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}-x(x+1)=-2$

Et puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{|x^3-x|}{x-1}\neq\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{|x^3-x|}{x-1}$

Alors : la fonction $x\mapsto\frac{|x^3-x|}{x-1}$ n'admet pas de limites en1

PROF: ATMANI NAJIB

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{|x-1|}$ On trouve une forme indéterminée : "$\dfrac{0}{0}$"

a) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{|x-1|}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{\left(\sqrt{3+x^2}-2\right)\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{3+x^2-4}{(x-1)\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{x^2-1}{(x-1)\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{x+1}{\sqrt{3+x^2}+2}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{|x-1|}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{-(x-1)}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{\left(\sqrt{3+x^2}-2\right)\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)}{-(x-1)\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{3+x^2-4}{-(x-1)\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}-\dfrac{x+1}{\sqrt{3+x^2}+2}=-\dfrac{1}{2}$

Et puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{|x-1|}\neq\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{|x-1|}$ alors : la fonction $x\mapsto\dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{|x-1|}$ n'admet pas de limites en1

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x|x|}{\sqrt{1+x^2}-1}$; On trouve une forme indéterminée : "$\dfrac{0}{0}$"

a) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{x|x|}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{1+x^2}+1=2$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{x|x|}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{-x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{-x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}-\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)=-2$

Et puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{x|x|}{\sqrt{1+x^2}-1}\neq\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{x|x|}{\sqrt{1+x^2}-1}$ alors : la fonction $x\mapsto\dfrac{x|x|}{\sqrt{1+x^2}-1}$ n'admet pas de limites en0

Exercice22 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$ 3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\times\dfrac{3x}{\sin 3x}\times\dfrac{2}{3}=1\times1\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$ On montre que : $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

En effet : $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x\right)=2\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin\dfrac{\pi}{6}\cos x\right)=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$ On pose $x-\dfrac{\pi}{6}=h$ donc : $x\to\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow h\to0$

PROF: ATMANI NAJIB

$x-\frac{\pi}{6}=h \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+h$

Donc : $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}=2\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=2\times 1=2$

3) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ Directement on trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}}\right)=\lim_{h\to 0^+}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cosh}{\frac{h^2}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{2}$ (On pose $\sqrt{x}=h$)

Exercice23 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x(3+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$

1) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\le -2x$

b) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$ $f(x)\le -4x^2$

2) Déterminer : $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

Solution : 1) Soit : $x\in\mathbb{R}^+$

On a : $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2-x^2-1}=-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

On a : $x^2\prec x^2+1$ donc : $|x|=\sqrt{x^2}\prec\sqrt{x^2+1}$ et puisque on a : $x\in\mathbb{R}^+$ donc : $|x|=x$

Alors : $x\prec\sqrt{x^2+1}$ et donc : $2x\prec\sqrt{x^2+1}+x$ c'est-à-dire : $-\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\prec -2x$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\le -2x$

b) Soit : $x\in\mathbb{R}^+$ on a ; $-1\le\sin x$ donc : $2\le 3+\sin x$ donc : $x(3+\sin x)\ge 2x$

Donc : $-2x^2(3+\sin x)\le -4x^2$ et on a : $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\le -2x$

Alors : $\frac{x(3+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}\le -2x^2(3+\sin x)$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}^+$ $f(x)\le -4x^2$

2)On a : $\forall x\in\mathbb{R}^+$ $f(x)\le -4x^2$ et puisque : $\lim_{x\to+\infty}-4x^2=-\infty$ Alors : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

Exercice24 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=4x\tan 2x-\frac{\pi}{\cos 2x}$

1) Déterminer : D_f 2) Montrer que : $\forall x\in D_f$; $f(x)=\frac{4x\sin(2x)-\pi}{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

PROF: ATMANI NAJIB

3) Calculer : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{4x\sin(2x)-\pi}{x-\frac{\pi}{4}}$

4) En déduire : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)$

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\ 2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/\ x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Soit : $x\in D_f$ on a ; $f(x)=4x\tan 2x-\dfrac{\pi}{\cos 2x}=4x\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}-\dfrac{\pi}{\cos 2x}=\dfrac{4x\sin 2x-\pi}{\cos 2x}=\dfrac{4x\sin 2x-\pi}{2\cos^2 x-1}$

$$f(x)=\frac{4x\sin 2x-\pi}{2\left(\cos^2 x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4x\sin 2x-\pi}{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

3) a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{-2\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}-\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{4x\sin(2x)-\pi}{x-\frac{\pi}{4}}$ On pose $x-\frac{\pi}{4}=h$ donc : $x\to\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow h\to 0$ e t $x-\frac{\pi}{4}=h\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+h$

$$4x\sin(2x)-\pi=4\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\sin\left(2\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\right)-\pi=(4h+\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)-\pi=(4h+\pi)\cos(2h)-\pi$$

$$4x\sin(2x)-\pi=4h\cos(2h)+\pi\left(1-\cos(2h)\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{4x\sin(2x)-\pi}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to 0}\frac{4h\cos(2h)+\pi\left(1-\cos(2h)\right)}{h}=\lim_{h\to 0}4\cos(2h)+4\pi h\left(\frac{1-\cos(2h)}{(2h)^2}\right)=4+0\times\frac{1}{2}=4$$

4) Déduction de : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)$

$$4x\sin(2x)-\pi$$

PROF: ATMANI NAJIB

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4x\sin(2x)-\pi}{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{x-\frac{\pi}{4}}{\frac{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}}\times\frac{1}{2\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{4}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2\sqrt{2}}=-2$$

Exercice25 : Considérons la fonction f_m définie par : $f_m(x)=\frac{(m-1)x^2-1}{mx^2-(m+1)x+1}$ avec : $m\in\mathbb{R}_+^*$

1) Déterminer : suivant les valeurs de m : D_{f_m}

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$

3) Déterminer : suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to 1} f_m(x)$

4) Déterminer : suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}} f_m(x)$

Solution : 1) $D_{f_m}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,mx^2-(m+1)x+1\neq 0\right\}$

$mx^2-(m+1)x+1=0$; $\Delta=(m+1)^2-4m=m^2+2m+1-4m=m^2-2m+1=(m-1)^2$

Donc : $x_1=\frac{m+1-m+1}{2m}=\frac{1}{m}$ et $x_2=\frac{m+1+m-1}{2m}=1$

Donc : $D_{f_m}=\mathbb{R}-\left\{1;\frac{1}{m}\right\}$

2) a) Calcul de : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f_m(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(m-1)x^2-1}{mx^2-(m+1)x+1}$$

Si : $m-1\neq 0$ c'est-à-dire : $m\neq 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(m-1)x^2}{mx^2}=\frac{m-1}{m}=1-\frac{1}{m}$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(m-1)x^2}{mx^2}=\frac{m-1}{m}=1-\frac{1}{m}$

Si : $m=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)=1-\frac{1}{m}\quad\forall m\in\mathbb{R}_+^*$

3) Détermination suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to 1} f_m(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to 1} f_m(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(m-1)x^2-1}{mx^2-(m+1)x+1}=\text{"}\frac{m-2}{0}\text{"}$

Détermination du signe de : $mx^2-(m+1)x+1$ et $m-2$

On a : $x_1=\frac{1}{m}$ et $x_2=1$ les racines de : $mx^2-(m+1)x+1$

PROF ATMANI NAJIB

$\frac{1}{m}-1=\frac{1-m}{m}$

Si : $0 \prec m \prec 1$; $\frac{1}{m}-1 \succ 0$ c'est-à-dire : $\frac{1}{m} \succ 1$ Donc :

x	$-\infty$		1		$1/m$		$+\infty$
$mx^2-(1+m)x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim_{x\to 1^+} f_m(x)=+\infty$ car $\lim_{x\to 1^+} mx^2-(m+1)x+1=0^-$ et $m-2 \prec 0$

$\lim_{x\to 1^-} f_m(x)=-\infty$ car $\lim_{x\to 1^+} mx^2-(m+1)x+1=0^+$ et $m-2 \prec 0$

Si : $1 \prec m \prec 2$; $\frac{1}{m}-1 \prec 0$ c'est-à-dire : $\frac{1}{m} \prec 1$ et $m-2 \prec 0$

Donc :

x	$-\infty$		$1/m$		1		$+\infty$
$mx^2-(1+m)x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim_{x\to 1^+} f_m(x)=-\infty$ car $\lim_{x\to 1^+} mx^2-(m+1)x+1=0^+$ et $m-2 \prec 0$

$\lim_{x\to 1^-} f_m(x)=+\infty$ car $\lim_{x\to 1^+} mx^2-(m+1)x+1=0^-$ et $m-2 \prec 0$

Si : $1=m$; $f_1(x)=\frac{-1}{x^2-2x+1}=\frac{-1}{(x-1)^2}$

Donc : $\lim_{x\to 1} f_m(x)=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$

Si : $2=m$; $f_2(x)=\frac{x^2-1}{2x^2-3x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{x+1}{2x-1}$

Donc : $\lim_{x\to 1} f_m(x)=2$

Si : $2 \prec m$; $\frac{1}{m}-1 \prec 0$ c'est-à-dire : $\frac{1}{m} \prec 1$ et $m-2 \succ 0$

Donc : $\lim_{x\to 1^+} f_m(x)=+\infty$ car $\lim_{x\to 1^+} mx^2-(m+1)x+1=0^+$ et $m-2 \succ 0$

$\lim_{x\to 1^-} f_m(x)=-\infty$ car $\lim_{x\to 1^+} mx^2-(m+1)x+1=0^-$ et $m-2 \succ 0$

4) Détermination suivant les valeurs de m : $\lim_{x\to \frac{1}{m}} f_m(x)$

On a : $\lim_{x\to \frac{1}{m}} \frac{(m-1)x^2-1}{mx^2-(m+1)x+1} = "\frac{\frac{-m^2+m-1}{m^2}}{0}"$

Pour : $-m^2+m-1$; $\Delta=-3 \prec 0$ et donc : $-m^2+m-1 \prec 0$

Si : $0 \prec m \prec 1$; $\frac{1}{m}-1 \succ 0$ c'est-à-dire : $\frac{1}{m} \succ 1$ Donc :

x	$-\infty$		1		$1/m$		$+\infty$
$mx^2-(1+m)x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}^+} f_m(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}^+} mx^2-(m+1)x+1 = 0^+$ et $\frac{-m^2+m-1}{m^2} \prec 0$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}^-} f_m(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}^-} mx^2-(m+1)x+1 = 0^-$ et $\frac{-m^2+m-1}{m^2} \prec 0$

Si : $1 \prec m$; $\frac{1}{m}-1 \prec 0$ c'est-à-dire : $\frac{1}{m} \prec 1$ et $\frac{-m^2+m-1}{m^2} \prec 0$

Donc :

x	$-\infty$		$1/m$		1		$+\infty$
$mx^2-(1+m)x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}^+} f_m(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}^+} mx^2-(m+1)x+1 = 0^-$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}^-} f_m(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}^-} mx^2-(m+1)x+1 = 0^+$

Exercice26 : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x-E(x)}{x+E(x)}$

1) Déterminer : D_f

2) a) Montrer que : $f(x)=1$ si $x \in]0;1[$

b) Montrer que : $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ si $x \in]-1;0[$

c) Etudier la limite de f en 0

3) a) Montrer que : $0 \prec f(x) \le \frac{1}{x+1}$; $\forall x \in]1;+\infty[$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4) Encadrer $f(x)$; si $x \in]-\infty;-1[$ et en déduire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Solution : 1) $f(x) = \frac{x-E(x)}{x+E(x)}$

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+E(x) \neq 0\}$

On a : $x+E(x)=0 \Leftrightarrow E(x)=-x$

Puisque $E(x) \in \mathbb{Z}$ alors : $-x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

$E(x)=-x \Leftrightarrow x=-x \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$

Donc : $D_f = \mathbb{R}-\{0\}$

2) a) Montrons que : $f(x)=1$ si $x \in]0;1[$

Soit $x \in]0;1[$ donc : $E(x)=0$ et donc : $f(x)=\frac{x-0}{x+0}=1$

b) Montrons que : $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ si $x \in]-1;0[$

Soit $x \in]-1;0[$ donc : $E(x)=-1$ et donc : $f(x)=\frac{x-(-1)}{x+(-1)}=\frac{x+1}{x-1}$

c) Etudions la limite de f en 0

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 1=\boxed{1}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x-1}=\frac{0+1}{0-1}=\boxed{-1}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ alors la fonction f n'admet pas de limite en 0

3) a) Montrons que : $0 \prec f(x) \leq \frac{1}{x+1}$; $\forall x \in]1;+\infty[$

Soit $x \in]1;+\infty[$ donc : $x \succ 1 \Rightarrow E(x) \geq 1$ (la partie entière est une fonction croissante)

Donc : $E(x)+x \geq x+1$ c'est-à-dire : $E(x)+x \geq x+1$ $0 \prec \frac{1}{E(x)+x} \leq \frac{1}{x+1}$ ①

On a aussi : $E(x) \leq x \prec E(x)+1$ donc : $0 \leq x-E(x) \prec 1$ ②

① et ② $\Rightarrow 0 \leq \frac{x-E(x)}{x+E(x)} \prec \frac{1}{x+1}$ c'est-à-dire : $0 \prec f(x) \leq \frac{1}{x+1}$; $\forall x \in]1;+\infty[$

b) Déduction de : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a : $\forall x \in]1;+\infty[$; $0 \prec f(x) \leq \frac{1}{x+1}$ et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

4) Encadrement de $f(x)$; si $x \in]-\infty;-1[$ et en déduction de : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Soit $x \in]-\infty;-1[$

On a : $E(x) \leq x \prec E(x)+1$ donc : $x-1 \prec E(x) \leq x$

Donc : $2x-1 \prec E(x)+x \leq 2x$

Donc : $-2x \leq -(E(x)+x) \prec -2x+1$ et $-x \leq -E(x) \prec 1-x$

Et par suite : $0 \leq \frac{x-E(x)}{-(x+E(x))} \leq \frac{1}{-2x}$ c'est-à-dire : $0 \leq -f(x) \leq -\frac{1}{2x}$

Donc : $\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq 0$ et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2x}=0$ Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: AT