http://www.xriadiat.com/ **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Série N°2 : *LIMITE D'UNE FONCTION*

Exercice1 : Soit la fonction : $f : x \mapsto 3x^2 + 2x$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Solution Montrons que : $\forall\varepsilon \succ 0\ \exists\alpha \succ 0\ \ (\forall x\in D_f)\ |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$?

On a : $|f(x)| = |3x^2 + 2x| = |x(3x+2)| = |x||3x+2|$

On va ajouter une condition pour pouvoir majorer : $|x||3x+2|$

Soit : $x \in]-1;1[$ donc : $-1 \prec x \prec 1 \Rightarrow -3 \prec 3x \prec 3 \Rightarrow -1 \prec 3x+2 \prec 5 \Rightarrow |3x+2| \prec 5$

Donc : $|f(x)| \le 5|x|$ si $x \in]-1;1[$

Soit $\varepsilon \succ 0$ on cherche $\alpha \succ 0$ tel que : $|x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Pour avoir $|f(x)| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $5|x| \prec \varepsilon$ c'est à dire : $|x| \prec \frac{\varepsilon}{5}$ et $|x| \prec 1$

Il suffit de prendre α le plus petit des nombres : $\frac{\varepsilon}{5}$ et 1 c'est-à-dire : $\alpha = \inf\left(\frac{\varepsilon}{5};1\right)$

Donc : $\forall\varepsilon \succ 0\ \exists\alpha \succ 0\ \ (\alpha = \inf\left(\frac{\varepsilon}{5};1\right))\,|x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Exercice2: Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{x}{x-2}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$

Solution Montrons que : $\forall\varepsilon \succ 0\ \exists\alpha \succ 0\ \ (\forall x\in D_f)\ |x-1| < \alpha \Rightarrow |f(x)+1| < \varepsilon$?

On a : $|f(x)+1| = \left|\frac{x}{x-2} + 1\right| = \left|\frac{2x-2}{x-2}\right| = 2\left|(x-1)\frac{1}{x-2}\right| = 2|x-1|\left|\frac{1}{x-2}\right|$

On va ajouter une condition pour pouvoir majorer : $2|x-1|\left|\frac{1}{x-2}\right|$

Soit : $x \in \left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$ donc : $\frac{1}{2} \prec x \prec \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} - 2 \prec x-2 \prec \frac{3}{2} - 2 \Rightarrow -\frac{3}{2} \prec x-2 \prec -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \prec |x-2| \prec \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x-2|} \prec 2$

Donc : $|f(x)+1| \le 4|x-1|$ si $x \in \left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$

Soit $\varepsilon \succ 0$ on cherche $\alpha \succ 0$ tel que : $|x-1| < \alpha \Rightarrow |f(x)+1| < \varepsilon$

Pour avoir $|f(x)+1| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $4|x-1| \prec \varepsilon$ c'est à dire : $|x-1| \prec \frac{\varepsilon}{4}$ et $|x-1| \prec \frac{1}{2}$

Il suffit de prendre α le plus petit des nombres : $\frac{\varepsilon}{4}$ e t$\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\alpha = \inf\left(\frac{\varepsilon}{4};\frac{1}{2}\right)$

Donc : $\forall\varepsilon \succ 0\ \exists\alpha \succ 0\ \ (\alpha = \inf\left(\frac{\varepsilon}{4};\frac{1}{2}\right))\,|x-1| < \alpha \Rightarrow |f(x)+1| < \varepsilon$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$

PROF. ATMANI NAJIB

Exercice3 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Solution Montrons que : $\forall \varepsilon \succ 0 \ \exists A \succ 0 \ (\forall x \in D_f) \ x \succ A \Rightarrow |f(x)| \prec \varepsilon$?

Soit $\varepsilon \succ 0$ et soit $x \in]1;+\infty[$ on cherche $A \succ 0$ tel que :) $x \succ A \Rightarrow |f(x)| \prec \varepsilon$

On a : $|f(x)| \prec \varepsilon \Leftrightarrow x^2 - 1 \succ \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x \succ \sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon}}$

Donc : Il suffit de prendre $A = \sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon}} \succ 0$

$\forall \varepsilon \succ 0 \ \exists A \succ 0 \ (A = \sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon}} \succ 0) \ x \succ A \Rightarrow |f(x)| \prec \varepsilon$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = 0$

Exercice4 : Monter que : $\lim_{x\to0} 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2$

Solution : Soit : $x \in \mathbb{R}^*$ $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 1$ donc : $|f(x)-2| = x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le x^2$ et on a $\lim_{x\to0} x^2 = 0$ Alors : $\lim_{x\to0} f(x) = 2$

Exercice5 : Déterminer : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+3\sin x}{\sqrt{x}}$

Solution : Soit : $x \in \mathbb{R}^{*+}$: $\frac{\sqrt{x}+3\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{3\sin x}{\sqrt{x}} = 1 + 3\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

Donc : $\frac{\sqrt{x}+3\sin x}{\sqrt{x}} - 1 = 3\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

Donc : $\left|\frac{\sqrt{x}+3\sin x}{\sqrt{x}} - 1\right| = \left|3\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| = \left|\frac{3}{\sqrt{x}}\right| |\sin x| \le \left|\frac{3}{\sqrt{x}}\right|$

Donc : $\left|\frac{\sqrt{x}+3\sin x}{\sqrt{x}} - 1\right| \le \frac{3}{\sqrt{x}}$ $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$ car $|\sin x| \le 1$

Puisque : $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$ Alors : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+3\sin x}{\sqrt{x}} = 1$

Exercice6 : Soit la fonction g définie par : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 3 & si\ x \ge 1 \\ -x^2 + x + \alpha & si\ x \succ 0 \end{cases} \end{array}$

Déterminer α pour que la fonction g admet une limite en 1.

Solution : $\lim_{\substack{x\to1 \\ x\succ1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ x\succ1}} 2x^2 - x + 3 = 4$ et $\lim_{\substack{x\to1 \\ x\prec1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ x\prec1}} -x^2 + x + \alpha = \alpha$

g admet une limite en 1 $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to1 \\ x\succ1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ x\prec1}} f(x) \Leftrightarrow \alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 4$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice7 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2+x+2+\frac{1}{x^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x$ 4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2+x+2=2$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to 0} x^2+x+2+\frac{1}{x^2}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}=\frac{3}{1}=3$

3) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -x=-\infty$

Donc Formes indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x=+\infty$

4)On a : $\lim\limits_{x\to 2} x^2-4=2^2-4=4-4=0$ et $\lim\limits_{x\to 2} x-2=2-2=0$

Donc : Formes indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2} x+2=4$

Exercice8 : Calculer les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2-x+4$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2-2x+4$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3+x^2-x+4$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2-2x-1}{2x^2-3x+8}$ 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^4-7x^2+3x-6}{2x^2+x-1}$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9x^2-2x^2-x-3}{3x^3-x+11}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-9x^2-4x^3+1$ 8) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2x^6-2x^5+3x-15$ 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$ 10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$

11) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^4-x^2+5x+2027}$ 11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{16x^3-2x^2+2025}{x^3-x^2+1}}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2-x+4=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2-2x+4=\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3+x^2-x+4=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2-2x-1}{2x^2-3x+8}$

On sait que : La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ est la limite du rapport des termes de plus grand degré en $+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2-2x-1}{2x^2-3x+8}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{2x^2}=\frac{4}{2}=2$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^4-7x^2+3x-6}{2x^2+x-1}$

On sait que : La limite d'une fonction rationnelle en $-\infty$ est la limite du rapport des termes de plus grand degré en $-\infty$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^4-7x^2+3x-6}{2x^2+x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^4}{2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x\times x\times x\times x}{2x\times x}=\lim_{x\to-\infty}2x\times x=\lim_{x\to-\infty}2x^2=+\infty$

6) $\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2-x-3}{3x^3-x+11}=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2}{3x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3\times3\times x\times x}{3\times x\times x\times x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0^-$

7) $\lim_{x\to+\infty}x-9x^2-4x^3+1$

On sait que : La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ est la limite de son plus Grand terme en $+\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}x-9x^2-4x^3+1=\lim_{x\to+\infty}-4x^3=-\infty$

8) $\lim_{x\to-\infty}x^2-2x^6-2x^5+3x-15$

On sait que : La limite d'une fonction polynôme en $-\infty$ est la limite de son plus Grand terme en $-\infty$

Donc : $\lim_{x\to-\infty}x^2-2x^6-2x^5+3x-15=\lim_{x\to-\infty}-2x^6=-\infty$

9) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-7x^4}{14x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{2}=-\infty$

10) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^5}{2x^6}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{x}=0$

11) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2x^4-x^2+5x+2027}$

On a : $\lim_{x\to-\infty}2x^4-x^2+5x+2027=\lim_{x\to-\infty}2x^4=+\infty$

Donc : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2x^4-x^2+5x+2027}=+\infty$

11) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{16x^3-2x^2+2025}{x^3-x^2+1}}$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{16x^3-2x^2+2025}{x^3-x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{16x^3}{x^3}=16$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{16x^3-2x^2+2025}{x^3-x^2+1}}=\sqrt{16}=4$

Exercice9 : Calculer et discuter suivant les valeurs de $n\in\mathbb{N}^*$ la limite suivante : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^n-3x}{x^2+1}\right)$

Solution :

Si : $n=1$: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^n-3x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-3x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{x}\right)=\boxed{0}$

Si : $n=2$: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^n-3x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=\boxed{1}$

Si : $n\succ2$: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^n-3x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^n}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^{n-2}=\boxed{+\infty}$

Exercice10 : Calculer suivant les valeurs du paramètre réel m la limite suivante :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}$$

PROF: ATMANI NAJIB

Solution : Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}$ avec $m\in\mathbb{R}$

On pose : $f(x)=\dfrac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}$

$m^2-1=0\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow m=-1\ ou\ m=1$

→Si $m=1$: $f(x)=\dfrac{-x+5}{3x+1}$

Alors cette limite devient :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+5}{3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{3x}=\boxed{-\frac{1}{3}}$$

→Si $m=-1$: $f(x)=\dfrac{-2x^2-x+5}{3x+1}$

Alors cette limite devient :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2-x+5}{3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2}{3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{3}x=\boxed{+\infty}$$

→Si : $m\neq-1$ et $m\neq1$:Alors : le terme de plus haut degré du polynôme est : $(m^2-1)x^3$

m	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$m2-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- ✓ Si : $m\in]-1;1[$: alors : $m^2-1\prec0$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(m^2-1)x^3}{3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}(m^2-1)x^2=\boxed{-\infty}$$

- ✓ Si : $m\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$: alors : $m^2-1\succ0$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(m^2-1)x^3}{3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}(m^2-1)x^2=\boxed{+\infty}$$

Exercice11 : Déterminer les limites suivantes :1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\sqrt{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}-1}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{x}-5x^2$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x}{x-\sqrt{x}}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}-x+1}{x\sqrt{x}+x^2}$

Solution :1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\sqrt{x}$; on a $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}-\sqrt{x}=-\infty$; donc : Formes indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)$ et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\sqrt{x}=\boxed{+\infty}$

PROF: ATMANI NAJIB

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x\sqrt{x}-1}$: Soit x un réel positif et différent de 1, on a :

$x-1=\sqrt{x}^2-1=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$ et $x\sqrt{x}-1=\left(\sqrt{x}\right)^3-1=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)$

Alors : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}=\boxed{\frac{2}{3}}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{x}-5x^2$

Soit x un réel strictement positif on a : $x\sqrt{x}-5x^2=x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-5\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{x}-5x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-5\right)=-\infty$ car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-3x}{x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{1}{x}-3\right)}{x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-3}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{-3}{1}=\boxed{-3}$ car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}-x+1}{x\sqrt{x}+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=0$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{\sqrt{x}}=1$

Exercice12 : Déterminer les limites suivantes :1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3+x+1}-3x$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x^3$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}-2x$

Solution :

Remarque : En général on commence par un calcul direct pour voir si c'est une
Forme indéterminée ou non.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3+x+1}-3x$ On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3+x+1}-3x=\lim\limits_{x\to+\infty}|x|\sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3x$ or : $|x|=x$ car $x\mapsto+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3+x+1}-3x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3\right)=-\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=+\infty$

PROF: ATMANI NAJIB

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} - x^3$: On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} - x^3 = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+x} - 2x$

Méthode : On utilise le conjugué, en écrivant 2x sous la forme x + x.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+x} - 2x = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-x} - x\right) + \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^2-x-x^2\right)}{\sqrt{x^2-x}+x} + \frac{\left(x^2+x-x^2\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+x} - 2x = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)} + \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}$$

car $|x| = x$ puisque : $x \mapsto +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+x} - 2x = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{0}$$

Exercice13 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{\sin x}$ 2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$ 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \tan x}{1-\cos x}$ 4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{x-\frac{\pi}{3}}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{\sin x}$: On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

Rappel : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan ax}{x} = a$ avec : $a \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan 3x}{x}\right) \times \left(\frac{x}{\sin x}\right) = 3 \times 1 = 3$$

Car : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{x} = 3$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$; $\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2} \times x^2}}{\frac{\sin x}{x} \times x} = \frac{|x| \times \sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}{\frac{\sin x}{x} \times x} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}{\frac{\sin x}{x}}$ avec $|x| = x$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \tan x}{1-\cos x}$; $\frac{x \tan x}{1-\cos x} = \frac{x \frac{\tan x}{x} \times x}{\frac{1-\cos x}{x^2} \times x^2} = \frac{\frac{\tan x}{x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}$ et puisque : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ et

PROF: ATMANI NAJIB

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Alors : $\lim_{x\to0}\frac{x\tan x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\tan x}{x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{x-\frac{\pi}{3}}$ On pose $x-\frac{\pi}{3}=h$ donc : $x\to\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow h\to0$ e t $x-\frac{\pi}{3}=h\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+h$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{h\to0}\frac{1-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right)}{h}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos(\mathrm{h})-\sin\frac{\pi}{3}\sin(\mathrm{h})=\frac{1}{2}\cos(\mathrm{h})-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\mathrm{h})$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{h\to0}\frac{1-2\left(\frac{1}{2}\cos(\mathrm{h})-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\mathrm{h})\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1-\cos(\mathrm{h})+\sqrt{3}\sin(\mathrm{h})}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1-\cos(\mathrm{h})}{h}+\sqrt{3}\frac{\sin(\mathrm{h})}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1-\cos(\mathrm{h})}{h^2}\times h+\sqrt{3}\frac{\sin(\mathrm{h})}{h}=0+\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

Exercice14 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^3}$ 3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$ 4) $\lim_{x\to-\infty}1+\frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

5) $\lim_{x\to+\infty}x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Solution : 1) On pose : $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$ $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le1$ donc : $|f(x)|\le x^2$ et on a $\lim_{x\to0}x^2=0$ Alors : $\lim_{x\to0}f(x)=0$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^3}$? on pose : $f(x)=\frac{\cos x}{x^3}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$ $|\cos x|\le1$ donc : $|f(x)|\le\frac{1}{|x|^3}$ et on a $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|^3}=0$ Alors : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$? on pose : $f(x)=\frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$: $-1\le\cos x\le1$ et $-1\le\sin x\le1$ donc : $0\le\frac{1+\sin x}{2+\cos x}\le2$ et par suite : $0\le f(x)\le\frac{2}{x^2}$

PROF: ATMANI NAJIB

Et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$? on pose : $f(x) = 1+\frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $2+\sqrt{x^4+1} \geq \sqrt{x^4}$ C'est-à-dire : $2+\sqrt{x^4+1} \geq x^2$

Donc : $\frac{1}{2+\sqrt{x^4+1}} \leq \frac{1}{x^2}$ donc : $|f(x)-1| \leq \frac{1}{|x|}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{|x|} = 0$ Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$: On pose : $X = x^2$: $x \to +\infty \Rightarrow X \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} X \sin\left(\frac{1}{X}\right)$: On pose : $t = \frac{1}{X}$: $X \to +\infty \Rightarrow t \to 0^+$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} X \sin\left(\frac{1}{X}\right) = \lim\limits_{t\to0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Exercice15 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x+1}{x^2-x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3-1}{x^2+x-2}$ 3) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$ 4) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^3+x-2}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x+1}{x^2-x-2}$; $\lim\limits_{x\to-1} x+1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to-1} x^2-x-2 = 0$ On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$\lim\limits_{x\to-1} \frac{x+1}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{x+1}{(x+1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{3}$

2) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3-1}{x^2+x-2}$? $\lim\limits_{x\to1} x^3-1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to1} x^2+x-2 = 0$

On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

On a : $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ et $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$

Donc : $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3-1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+x+1}{x+2} = \frac{3}{3} = 1$

3) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to2} \frac{x+3}{x-1} = 5$

4) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^3+x-2}$; $\lim\limits_{x\to-1} x^2-1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to-1} x^3+x-2 = 0$ On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

En utilisant la division euclidienne : $x^3+x-2 = (x-1)(x^2+x+2)$

PROF: ATMANI NAJIB

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(x^2+x+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+2}=\frac{1}{2}$$

Exercice16 : Calculer les limites suivantes :1) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{x^2+x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+2}{x-\sqrt{x}}$ 3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\frac{1-\sqrt{x+3}}{x^2-x}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{x^2+x-2}$: Déterminons le signe de : x^2+x-2

On a : $\Delta=1+8=9$ donc : $x_1=\frac{-1+3}{2}=1$ et $x_2=\frac{-1-3}{2}=-2$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
x^2+x-2	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{x^2+x-2}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}x^2+x-2=0^-$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+2}{x-\sqrt{x}}$ on a : $x-\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$ et si $x\in\left]0;1\right[$ alors : $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\prec 0$

On a donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}x-\sqrt{x}=0^-$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}x+2=2$

Par suite : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+2}{x-\sqrt{x}}=-\infty$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\frac{1-\sqrt{x+3}}{x^2-x}$; on a : $x^2-x=x(x-1)$ et puisque : $x\succ 1$ alors : $x^2-x\geq 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}1-\sqrt{x+3}=-1$

Par suite : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\frac{1-\sqrt{x+3}}{x^2-x}=-\infty$

Exercice17 : Calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{|x-2|-2}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{|x+1|-|x-1|}$ 4) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^2+2x}$

5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+x-2}$ On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

On a : $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$ et $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+2}=\frac{1^2+1+1}{1+2}=\frac{3}{3}=\boxed{1}$$

2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{|x-2|-2}$

Puisque : On cherche la limite au voisinage de 4 on peut supposer que : $x\succ 2$

C'est-à-dire : $x-2\succ 0$ et donc : $|x-2|=x-2$

PROF: ATMANI NAJIB

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-4x}{|x-2|-2}=\lim_{x\to4}\frac{x^2-4x}{x-2-2}=\lim_{x\to4}\frac{x^2-4x}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{x(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to4}x=\boxed{4}$$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{|x+1|-|x-1|}$

Puisque : On cherche la limite au voisinage de 4 on peut supposer que : $-1\prec x\prec 1$

C'est-à-dire : $x+1\succ 0$ et $x-1\prec 0$ donc : $|x+1|=x+1$ et $|x-1|=-x+1$

$$\lim_{x\to0}\frac{4x}{|x+1|-|x-1|}=\lim_{x\to0}\frac{4x}{x+1+x-1}=\lim_{x\to0}\frac{4x}{2x}=\frac{4}{2}=\boxed{2}$$

4) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x}$ On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

On a : $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ et $x^2+2x=x(x+2)$

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+5x+6}{x^2+2x}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+3)}{x(x+2)}=\lim_{x\to-2}\frac{x+3}{x}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

5) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

On a : $x^2-9=(x-3)(x+3)$ et $x^2-3x=x(x-3)$

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{x}=\boxed{2}$$

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|^2+|x|}{|x|^2-|x|}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|(|x|+1)}{|x|(|x|-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|+1}{|x|-1}=\dfrac{|0|+1}{|0|-1}=\boxed{-1}$

Exercice18 : la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=\dfrac{2x+\cos x}{x+1}$

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\,|f(x)-2|\le\dfrac{3}{x}$

2) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Solution : 1) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ |f(x)-2|\le\dfrac{3}{x}$

Soit : $x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ f(x)-2=\dfrac{2x+\cos x}{x+1}-2=\dfrac{2x+\cos x-2x-2}{x+1}=\dfrac{\cos x-2}{x+1}$

Donc : $|f(x)-2|=\dfrac{|\cos x-2|}{|x+1|}=\dfrac{|\cos x-2|}{x+1}$ et on a : $|\cos x+(-2)|\le|\cos x|+|-2|\le1+2\le3$ car $|\cos x|\le1$

Et on a : $x\prec x+1$ donc : $\dfrac{1}{x+1}\prec\dfrac{1}{x}$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ |f(x)-2|\le\dfrac{3}{x}$

PROF:ATMANI NAJIB

2) On a : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$; $\left|f(x)-2\right|\le\frac{3}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$

Exercice19: Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\cos 2x-\cos x}{x\sin 2x}$

1) Déterminer : D_f 2) Montrer que : $\forall x\in D_f$; $f(x)=\dfrac{-\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{2x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x}$

3) En déduire : $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\sin 2x\neq0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq0 \text{ et } \sin 2x\neq0\right\}$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq0 \text{ et } 2x\neq k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq0 \text{ et } x\neq k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}=\mathbb{R}-\left\{k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$$

2)Soit : $x\in D_f$ on a ; $f(x)=\dfrac{\cos 2x-\cos x}{x\sin 2x}$

On sait que : $\cos p-\cos q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Donc : $$f(x)=\frac{-2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2x\sin x\cos x}=\frac{-2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2x\cos x 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{-\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{2x\cos x\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

3) On a : $$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{-\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{2x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\left(\frac{3x}{2}\right)2x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x}\left(\frac{3x}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\left(\frac{3x}{2}\right)2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x}\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4} \text{ car } \lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\left(\frac{3x}{2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin X}{X}=1$$

Exercice20 : Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x+3}} & ; si\quad x\succ1\\ f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{2x^2+x-3} & ; si\quad x\prec1\end{cases}$

1) Déterminer : D_f

2) Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

3) Etudier la limite de f en 1

4) Etudier la limite de f en $-\frac{3}{2}$

Solution :

1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\succ1 \text{ et } x\ge0 \text{ et } x+3\ge0 \text{ et } 2-\sqrt{x+3}\neq0\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\prec1 \text{ et } 2x^2+x-3\neq0 \text{ et } 1-x\ge0\right\}$

On a : $2-\sqrt{x+3}=0\Leftrightarrow2=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow4=x+3\Leftrightarrow1=x$

PROF. ATMANI NAJIB

$2x^2+x-3=0$ $\Delta=1+24=25$ donc : $x_1=\frac{-1-5}{4}=-\frac{3}{2}$ et $x_2=\frac{-1+5}{4}=\frac{4}{4}=1$

Donc : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\succ 1\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}/x\prec 1 \ et \ x\neq-\frac{3}{2}\right\}=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup\left]-\frac{3}{2};1\right[\cup]1;+\infty[$

2) Calculer des limites :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x+3}}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x+3}}=\frac{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{2-\sqrt{x\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}}=\frac{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{x}}}\right)}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{x}}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{x}}}}=-1$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1-x}}{2x^2+x-3}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{2x^2+x-3}=\frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x}{x^2}\right)}}{x\left(2x+1-\frac{3}{x}\right)}=\frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}{x\left(2x+1-\frac{3}{x}\right)}=\frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}{x\left(2x+1-\frac{3}{x}\right)}$$ car : $x\to-\infty$ donc : $|x|=-x$

$f(x)=\frac{-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}{2x+1-\frac{3}{x}}$ et par suite : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}{2x+1-\frac{3}{x}}=0$

3)a) Etude de la limite de f en 1 à droite :

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2+\sqrt{x+3})}{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})(\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\left(\sqrt{x}^2-1^2\right)(2+\sqrt{x+3})}{\left(2^2-\sqrt{x+3}^2\right)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{(4-x-3)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{-(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1^+}-\frac{2+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}+1}=-2$$

b) Etude de la limite de f en 1 à gauche :

PROF ATMANI NAJIB

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{2x^2+x-3}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{2x^2+x-3}=\frac{\sqrt{1-x}}{2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\frac{1-x}{-2\sqrt{1-x}(1-x)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=-\frac{1}{(2x+3)\sqrt{1-x}}$$

Donc : $\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}-\frac{1}{(2x+3)\sqrt{1-x}}=-\infty$ car $\lim_{x\to1^-}\sqrt{1-x}=0^+$

4) Etude de la limite de f en $-\frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to-\frac{3}{2}^+}\frac{\sqrt{1-x}}{2x^2+x-3}=\frac{\sqrt{1+\frac{3}{2}}}{2\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}-3}=\text{"}\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{0}\text{"}$$

Etudions le signe de : $2x^2+x-3$ $\Delta=1+24=25$ donc : $x_1=-\frac{3}{2}$ et $x_2=1$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2+x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a : $\lim_{x\to-\frac{3}{2}^+} 2x^2+x-3=0^-$ et donc : $\lim_{x\to-\frac{3}{2}^+} f(x)=-\infty$

On a : $\lim_{x\to-\frac{3}{2}^-} 2x^2+x-3=0^+$ et donc : $\lim_{x\to-\frac{3}{2}^-} f(x)=+\infty$

Exercice21 : Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{E(x)+\sin x}{x}\ ;\ si\quad x\neq0 \\ f(0)=0\end{cases}$

1) Déterminer : D_f

2) Etudier la limite de f en 0

3) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $|f(x)-1|\le\frac{2}{|x|}$

4) Déduire la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}$

2)

- Calculons : $\lim_{x\to0^+} f(x)$????

PROF ATMANI NAJIB

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{E(x)+\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{E(x)}{x}+\frac{\sin x}{x}$$

Soit $x\in\left]0;1\right[$; donc : $E(x)=0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{E(x)}{x}+\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{0}{x}+\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

- Calculons : $\lim_{x\to 0^-} f(x)$????

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{E(x)+\sin x}{x}$ on a : $\lim_{x\to 0^-}\sin x=\sin 0=0$ et $\lim_{x\to 0^-}E(x)=-1$

Donc : $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$

Alors la fonction f n'admet pas de limite en 0

3) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $|f(x)-1|\le\frac{2}{|x|}$

Soit $x\in\left]0;+\infty\right[$; $|f(x)-1|=\left|\frac{E(x)+\sin x}{x}-1\right|=\left|\frac{E(x)+\sin x-x}{x}\right|=\frac{|E(x)+\sin x-x|}{|x|}$

$$|f(x)-1|\le\frac{|E(x)-x|}{|x|}+\frac{|\sin x|}{|x|}$$

On sait que : $x-1\prec E(x)\le x$ donc : $-1\prec E(x)-x\le 0\le 1$ donc : $|E(x)-x|\le 1$

Donc : $|f(x)-1|\le\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x|}$ c'est-à-dire : $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $|f(x)-1|\le\frac{2}{|x|}$

4) Puisque : $|f(x)-1|\le\frac{2}{|x|}$ et $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{|x|}=0$ alors : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: A