1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction série N°3 : *LIMITE D'UNE FONCTION*

Exercice1 : Soit la fonction : $f : x \mapsto x^2 - \frac{x}{2}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Solution Montrons que : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ (\forall x \in D_f)\ 0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$?

On a : $|f(x)| = \left|x^2 - \frac{x}{2}\right| = |x|\left|x - \frac{1}{2}\right|$

On va ajouter une condition pour pouvoir majorer : $|x|\left|x - \frac{1}{2}\right|$

Soit : $x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ donc : $-\frac{1}{2} \prec x \prec \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \prec x - \frac{1}{2} \prec \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{1} \prec x - \frac{1}{2} \prec 0 \Rightarrow -1 \prec x - \frac{1}{2} \prec 1 \Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| \prec 1$

Donc : $|f(x)| \le |x|$ si $x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$

Soit $\varepsilon \succ 0$ on cherche $\alpha \succ 0$ tel que : $0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Pour avoir $|f(x)| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $|x| \prec \varepsilon$ et $|x| \prec \frac{1}{2}$

Il suffit de prendre α le plus petit des nombres : ε et $\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\alpha = \inf\left(\varepsilon;\frac{1}{2}\right)$

Donc : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ \left(\alpha = \inf\left(\varepsilon;\frac{1}{2}\right)\right) 0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Donc : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Exercice2 : Soit la fonction : $f : x \mapsto x^2 - 2x$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim_{x\to -1} f(x) = 3$

Solution Montrons que : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ (\forall x \in D_f)\ |x+1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$?

On a : $|f(x) - 3| = |x^2 - 2x - 3| = |x+1||x-3|$

On va ajouter une condition pour pouvoir majorer : $|x+1||x-3|$

Soit : $x \in]-2;0[$ donc : $-2 \prec x \prec 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} - 5 \prec x - 3 \prec -3 \Rightarrow |x-3| \prec 5$

Donc : $|f(x)| \le 5|x-1|$ si $x \in]-2;0[$

Soit $\varepsilon \succ 0$ on cherche $\alpha \succ 0$ tel que : $|x+1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$

Pour avoir $|f(x) - 3| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $5|x-1| \prec \varepsilon$ et $|x-1| \prec \frac{\varepsilon}{5}$

Il suffit de prendre α le plus petit des nombres : $\frac{\varepsilon}{5}$ et 1 c'est-à-dire : $\alpha = \inf\left(\frac{\varepsilon}{5};1\right)$

Donc : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ \left(\alpha = \inf\left(\frac{\varepsilon}{5};1\right)\right) |x+1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$

Donc : $\lim_{x\to -1} f(x) = 3$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice3 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{2x^2-3}{x^2+1}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

Solution Montrons que : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists B \succ 0\ (\forall x \in D_f)\ x \prec -B \Rightarrow |f(x)-2| \prec \varepsilon$?

Soit $\varepsilon \succ 0$ et soit $x \in]-\infty;0[$ on cherche $B \succ 0$ tel que : $x \prec -B \Rightarrow |f(x)-2| \prec \varepsilon$

On a : $|f(x)-2| = \left|\dfrac{2x^2-3}{x^2+1} - 2\right| = \left|\dfrac{-5}{x^2+1}\right| = \dfrac{5}{x^2+1} \le \dfrac{5}{x^2}$

Donc : $\forall x \in]-\infty;0[$; $|f(x)-2| \le \dfrac{5}{x^2}$

Donc : Pour avoir $|f(x)-2| \prec \varepsilon$ Il suffit d'avoir : $\dfrac{5}{x^2} \prec \varepsilon$ c'est à dire : $x^2 \succ \dfrac{5}{\varepsilon}$ c'est à dire :

$x \prec -\sqrt{\dfrac{5}{\varepsilon}}$

Par suite : Il suffit de prendre $B = \sqrt{\dfrac{5}{\varepsilon}}$ et on a bien : $B = \sqrt{\dfrac{5}{\varepsilon}} \succ 0$

Donc : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists B \succ 0\ \left(B = \sqrt{\dfrac{5}{\varepsilon}}\right)\ (\forall x \in D_f)\ x \prec -B \Rightarrow |f(x)-2| \prec \varepsilon$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

Exercice4 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x+2} & si\ x \ge 0 \\ f(x) = E(x) & si\ x \prec 0 \end{cases}$

Etudier la limite de f en $x_0 = 0$

Solution : Déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\prec0}} f(x)$?

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}} \dfrac{x(x-2)}{x+2} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\prec0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x\prec0}} E(x) = E(0)-1 = 0-1 = -1$

Puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}} f(x) \ne \lim\limits_{\substack{x\to0\\x\prec0}} f(x)$ alors f n'admet pas de limite au point : $x_0 = 0$

Exercice5 : Soit la fonction : $f : x \mapsto (x^2+x^4)\sin\dfrac{1}{x}$ déterminer : $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a $-1 \le \sin\dfrac{1}{x} \le 1$ et $x^2+x^4 \ge 0$ donc $-x^2-x^4 \le (x^2+x^4)\sin\dfrac{1}{x} \le x^2+x^4$ et puisque : $\lim\limits_{x\to0} x^2+x^4 = \lim\limits_{x\to0} -x^2-x^4 = 0$ Alors : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$

Exercice6 : Soient les fonctions tels que : $f(x) = \sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$ et $g(x) = \dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$k(x) = \dfrac{-3x+1}{x(x-2)}$ et $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3}\sin x$

PROF: ATMANI NAJIB

1)Déterminer : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2)Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$

3)Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

4)Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Solution :1) Déterminer : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$

$\lim\limits_{x\to 2} 2x+1=5$ et $\lim\limits_{x\to 2} -3x^2+x=-10$ donc : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\sqrt{5}\times(-10)=-10\sqrt{5}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x+1}=+\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2+x=\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2=-\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

- 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$? et $g(x)=\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}+1=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2}{x^2}=-2$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

- 2) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$? et $g(x)=\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x}+1=\sqrt{3}+1$ et $\lim\limits_{x\to 3} -2x^2+1=-17$ et $\lim\limits_{x\to 3} (x-3)^2=0^+$ donc : $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$?.

$\lim\limits_{x\to 0} h(x)=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x^2}\dfrac{\sin x}{x}$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1$ et puisque : $\lim\limits_{x\to 0} x^2+1=1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0^+$

et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x^2}=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=+\infty$

4) $k(x)=\dfrac{-3x+1}{x(x-2)}$ donc : $D_k=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0} -3x+1=1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2-2x=0$

Etude du signe de : x^2-2x

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2-2x=0^-$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2-2x=0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} k(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} k(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2} -3x+1=-5$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} x^2-2x=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} x^2-2x=0^-$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2^+} k(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} k(x)=+\infty$

Exercice7 : Calculer les limites suivantes :

PROF: ATMANI NAJIB

1) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+7}+\dfrac{x+2}{2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$ 3) $\lim\limits_{x\to 6^+}\dfrac{x+1}{2x-12}$ *et* $\lim\limits_{x\to 6^-}\dfrac{x+1}{2x-12}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}-5x^2+2x-6$ 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10x^3-x+1}{5x^2-2x+2}$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2-x+2}{2x^3-5x+11}$

7) $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x-1}{3x-12}$ *et* $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x-1}{3x-12}$ 8) $\lim\limits_{x\to-\infty}7x^2-3x-9$ 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{15x^3+2x-1}{5x^2-x+1}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10x^2+2x+8}{2x^3-4x+7}$ 11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-3x-2x^2\right)^3\left(5x^2-6x+2\right)^2$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1-3x-2x^2\right)^2\left(5x^2+2\right)^2}{\left(x-1\right)^3\left(2x^2-8x+5\right)^2}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+7}+\dfrac{x+2}{2}$

On a : $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+7}=\sqrt{2+7}=\sqrt{9}=3$ et $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{2+2}{2}=2$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+7}+\dfrac{x+2}{2}=3+2=5$

2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$

On a : $\lim\limits_{x\to 5}x^2-25=5^2-25=25-25=0$ et $\lim\limits_{x\to 5}x-5=0$

Donc Formes indéterminée : $"\dfrac{0}{0}"$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5^2}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}x+5=5+5=10$$

3) $a)$ $\lim\limits_{x\to 6^+}\dfrac{x+1}{2x-12}$

On a : $\lim\limits_{x\to 6^+}x+1=7$ et $\lim\limits_{x\to 6^+}2x-12=12-12=0$

On va étudier le signe de : $2x-12$

$2x-12=0\Leftrightarrow 2x=12\Leftrightarrow x=\dfrac{12}{2}\Leftrightarrow x=6$

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$2x-12$	$-$	0	$+$

On a donc : $\lim\limits_{x\to 6^+}2x-12=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 6^+}x+1=7$

Donc : $\lim\limits_{x\to 6^+}\dfrac{x+1}{2x-12}=+\infty$

$b)$ $\lim\limits_{x\to 6^-}\dfrac{x+1}{2x-12}=?$ On a : $\lim\limits_{x\to 6^-}2x-12=0^-$ et $\lim\limits_{x\to 6^-}x+1=7$

PROF. ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Donc $\lim_{x\to 6^-}\frac{x+1}{2x-12}=-\infty$

4) $\lim_{x\to+\infty} -5x^2+2x-6 \ = ?$

$\lim_{x\to+\infty} -5x^2+2x-6= \lim_{x\to+\infty} -5x^2=-\infty$

5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{10x^3-x+1}{5x^2-2x+2}$?

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{10x^3-x+1}{5x^2-2x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{10x^3}{5x^2}=\lim_{x\to-\infty}2\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2x^{3-2}=\lim_{x\to-\infty}2x^1=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$$

6) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-x+2}{2x^3-5x+11}$?

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-x+2}{2x^3-5x+11}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2}{2x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\times 2x\times x}{2\times x\times x\times x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-x+2}{2x^3-5x+11}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0^-$$

7) $a)\ \lim_{x\to4^+}\frac{x-1}{3x-12}=?$

On a : $\lim_{x\to4^+}x-1=3$ **et** $\lim_{x\to4^+}3x-12=12-12=0$

On va étudier le signe de : $3x-12$

$3x-12=0\Leftrightarrow 3x=12\Leftrightarrow x=\frac{12}{3}\Leftrightarrow x=4$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$3x-12$	$-$	0	$+$

On a donc : $\lim_{x\to4^+}3x-12=0^+$ et $\lim_{x\to4^+}x-1=3$ Donc $\lim_{x\to4^+}\frac{x-1}{3x-12}=+\infty$

7) $b)\ \lim_{x\to4^-}\frac{x-1}{3x-12}=?$ On a : $\lim_{x\to4^-}3x-12=0^-$ et $\lim_{x\to4^-}x-1=3$

Donc $\lim_{x\to4^-}\frac{x-1}{3x-12}=-\infty$

8) $\lim_{x\to-\infty}7x^2-3x-9 \ = ?$

$\lim_{x\to-\infty}7x^2-3x-9= \lim_{x\to-\infty}7x^2=+\infty$

9) $\lim_{x\to+\infty}\frac{15x^3+2x-1}{5x^2-x+1}$?

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{15x^3+2x-1}{5x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{15x^3}{5x^2}=\lim_{x\to+\infty}3\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}3x^{3-2}=\lim_{x\to+\infty}2x^1=\lim_{x\to+\infty}3x=+\infty$$

10) $\lim_{x\to+\infty}\frac{10x^2+2x+8}{2x^3-4x+7}$?

PROF: ATMANI NAJIB

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{10x^2+2x+8}{2x^3-4x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x^2}{2x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\times5x\times x}{2\times x\times x\times x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{10x^2+2x+8}{2x^3-4x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=0^+$$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-3x-2x^2\right)^3\left(5x^2-6x+2\right)^2=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^2\right)^3\left(5x^2\right)^2=\lim\limits_{x\to+\infty}-8x^6\times25x^4=\lim\limits_{x\to+\infty}-200x^{10}=-\infty$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1-3x-2x^2\right)^2\left(5x^2+2\right)^2}{\left(x-1\right)^3\left(2x^2-8x+5\right)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2x^2\right)^2\left(5x^2\right)^2}{\left(x\right)^3\left(2x^2\right)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{100x^8}{4x^7}=\lim\limits_{x\to+\infty}25\,x=+\infty$

Exercice8 : Limite et ordre

1)Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sin x}{x^2\left(2+\cos x\right)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_*^+$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}_*^+ : x^3-3x^2\prec f\left(x\right)\prec x^3+x^2$

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0^+}f\left(x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$

3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\forall x\in\mathbb{R}_*^+ : g\left(x\right)=\dfrac{2E\left(x\right)+\left(x-E\left(x\right)\right)^2}{x^2}$

a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0^+}g\left(x\right)$; $\lim\limits_{x\to0^-}g\left(x\right)$

b) la fonction g admet -elle une limite en 0 ? justifier la réponse

c) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(x\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}g\left(x\right)$

Solution : 1) a) Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}^* : \left|x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|=\left|x^2\right|\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|=x^2\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|\le x^2\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|$ car $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|\le1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^* : \left|x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-0\right|\le x^2$ et comme : $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$

b) Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x^3}$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}^* : \left|\dfrac{\cos x}{x^3}\right|=\left|\dfrac{1}{x^3}\right|\left|\cos x\right|\le\left|\dfrac{1}{x^3}\right|$ car $\left|\cos x\right|\le1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^* : \left|\dfrac{\cos x}{x^3}-1\right|\le\left|\dfrac{1}{x^3}\right|$ et comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{1}{x^3}\right|=0$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x^3}=0$

c) Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}^*$: $-1\leq\sin x\leq 1$ et $-1\leq\cos x\leq 1$ et un encadrement de : $\dfrac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$

On trouve : $0\leq\dfrac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}\leq\dfrac{2}{x^2}$: $\forall x\in\mathbb{R}^*$

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}=0$

$\left|\dfrac{\cos x}{x^3}\right|=\left|\dfrac{1}{x^3}\right||\cos x|\leq\left|\dfrac{1}{x^3}\right|$ car $|\cos x|\leq 1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^*$: $\left|\dfrac{\cos x}{x^3}-1\right|\leq\left|\dfrac{1}{x^3}\right|$ et comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{1}{x^3}\right|=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x^3}=0$

d) Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

On pose : $\forall x\in\mathbb{R}^*$: $h(x)=1+\dfrac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}^*$: $2+\sqrt{x^4+1}\geq\sqrt{x^4}$ c'est-à-dire : $2+\sqrt{x^4+1}\geq x^2$

Donc : $\dfrac{1}{2+\sqrt{x^4+1}}\leq\dfrac{1}{x^2}$ et par suite : $|h(x)-1|\leq\dfrac{1}{|x|}$; $\forall x\in\mathbb{R}^*$

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=1$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_*^+$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}_*^+ : x^3-3x^2\prec f(x)\prec x^3+x^2$

→Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}_*^+ : x^3-3x^2\prec f(x)\prec x^3+x^2$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x^3-3x^2=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x^3+x^2=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$

→Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}_*^+ : x^3-3x^2\prec f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3-3x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

→Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}_*^+ : x^3-3x^2 \prec f(x)\prec x^3+x^2$ donc : $\forall x\in\mathbb{R}_*^+ :\ 1-\dfrac{3}{x}\prec\dfrac{f(x)}{x^3}\prec 1+\dfrac{1}{x}$

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{3}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$

3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\forall x\in\mathbb{R}_*^+ : g(x)=\dfrac{2E(x)+\left(x-E(x)\right)^2}{x^2}$

→Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$

On a : $\forall x\in[0;1[: E(x)=0$ donc : $g(x)=\dfrac{2\times0+(x-0)^2}{x^2}=1$

Par suite : $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+} 1=\boxed{1}$

→Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to0^-} g(x)$

On a : $\forall x\in[-1;0[: E(x)=-1$ donc : $g(x)=\dfrac{2\times(-1)+\left(x-(-1)\right)^2}{x^2}=\dfrac{-2+(x+1)^2}{x^2}$

Comme : $\lim\limits_{x\to0^-} -2+(x+1)^2=-1$ et $\lim\limits_{x\to0^-} x^2=0^+$

Par suite : $\lim\limits_{x\to0^-} g(x)=-\infty$

b) Comme : $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-} g(x)$

Alors : g n'admet pas de limite en 0

c) Calculons les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

$$g(x)=\frac{2E(x)+\left(x-E(x)\right)^2}{x^2}$$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}^* : E(x)\le x\prec E(x)+1$ donc : $0\le x-E(x)\prec1$ donc : $0\le\left(x-E(x)\right)^2\prec1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^* : 2x-2\le 2E(x)+\left(x-E(x)\right)^2\le 2x+1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^* : \dfrac{2x-2}{x^2}\le\dfrac{2E(x)+\left(x-E(x)\right)^2}{x^2}\le\dfrac{2x+1}{x^2}$

→ Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$: Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

→ Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$: Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$

Exercice9 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$ 3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}$ 4) $\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}-2}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

On a : $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x+1}-2=0$ et $\lim\limits_{x\to3}x-3=0$: On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

On a :

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to3}\frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}$$

2) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$: On a : $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{x+2}-2=0$ et $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{2x+5}-3=0$: On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{2x+5}+3\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{2x+5}-3\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{2x+5}+3\right)(x+2-4)}{(2x+5-9)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{2x+5}+3\right)(x-2)}{2(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x+5}+3}{2\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{6}{8}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}$

On a : $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}=0$ et $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x}-1=0$: On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

PROF.ATMANI NAJIB

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(2x-1-\left(x^2-x+1\right)\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(-x^2+3x-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(-x-2)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(-x-2)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

Comme : $\lim_{x\to1}(-x-2)\left(\sqrt{x}+1\right)=2$ et $\lim_{x\to1}\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)=2$

Alors : $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}=\frac{2}{2}=\boxed{1}$

4) $\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}-2}$

On a : $\lim_{x\to9}\sqrt{x+7}-\sqrt{x}-1=0$ et $\lim_{x\to9}\sqrt{x+16}-\sqrt{x}-2=0$: On trouve une forme indéterminée : $"\frac{0}{0}"$

$$\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x+7}-4+4-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+16}-5+5-\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to9}\frac{\left(\sqrt{x+7}-4\right)+\left(3-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+16}-5\right)+\left(3-\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{\left(\frac{\left(\sqrt{x+7}-4\right)\left(\sqrt{x+7}+4\right)}{\sqrt{x+7}+4}\right)+\left(\frac{\left(3-\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x}\right)}{3+\sqrt{x}}\right)}{\frac{\left(\sqrt{x+16}-5\right)\left(\sqrt{x+16}+5\right)}{\sqrt{x+16}+5}+\left(\frac{\left(3-\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x}\right)}{3+\sqrt{x}}\right)}=\lim_{x\to9}\frac{\left(\frac{x+7-16}{\sqrt{x+7}+4}\right)+\left(\frac{9-x}{3+\sqrt{x}}\right)}{\frac{x+16-25}{\sqrt{x+16}+5}+\left(\frac{9-x}{3+\sqrt{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{\left(\frac{x-9}{\sqrt{x+7}+4}\right)+\left(\frac{9-x}{3+\sqrt{x}}\right)}{\frac{x-9}{\sqrt{x+16}+5}+\left(\frac{9-x}{3+\sqrt{x}}\right)}=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)\left(\frac{1}{\sqrt{x+7}+4}-\frac{1}{3+\sqrt{x}}\right)}{(x-9)\left(\frac{1}{\sqrt{x+16}+5}-\frac{1}{3+\sqrt{x}}\right)}=\lim_{x\to9}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+7}+4}-\frac{1}{3+\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x+16}+5}-\frac{1}{3+\sqrt{x}}}$$

Donc : $\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}-2}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{10}-\frac{1}{6}}=\frac{5}{8}$

Exercice10 : Calculer les limites suivantes :1) $\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x+1}}$ 2) $\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{x+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$

3) $\lim_{\substack{x\to m\\x\succ m}}\frac{x+1}{x-m}$ avec $m\succ0$ 4) $\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{x+1}{1-\left|x^2+x-1\right|}$

Solution : 1) $\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x+1}}$: On a :

PROF:ATMANI NAJIB

$$\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{1^2-\sqrt{x+1}^2}=\frac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{1-x-1}=\frac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{-x}=-\frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}-\frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}=-\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}-\left(1+\sqrt{x+1}\right)=-2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\sqrt{x}=0^+$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}}\frac{x+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$:

On a : $\frac{x+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}=\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}{x+1-1+x}=\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}{2x}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}}\frac{x+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}{2x}=-\infty$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to m\\ x\succ m}}\frac{x+1}{x-m}$ avec $m\succ 0$ puisque $x\succ m$ alors : $x-m\succ 0$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to m\\ x\succ m}}\frac{x+1}{x-m}=\text{"}\frac{m+1}{0^+}\text{"}$

Et puisque $m\succ 0$ alors : $m+1\succ 0$ et donc : $\lim\limits_{\substack{x\to m\\ x\succ m}}\frac{x+1}{x-m}=+\infty$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{x+1}{1-\left|x^2+x-1\right|}$; Déterminons le signe de : x^2+x-1

On a : $\Delta=1+4=5\succ 0$ donc : $x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2+x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a : $x\to 0$ *et* $x\succ 0$ donc : $x\in\left]0;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$ donc : $x^2+x-1\leq 0$

Par suite : $1-\left|x^2+x-1\right|=1--\left(x^2+x-1\right)=1+x^2+x-1=x^2+x$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{x+1}{1-\left|x^2+x-1\right|}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{x+1}{x^2+x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{x+1}{x(x+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{1}{x}=+\infty$

Exercice11 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x+\sin x}$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+\sin x}}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$ 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$ 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{x-\frac{\pi}{2}}$

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ 8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}$

PROF: ATMANI NAJIB

Solution : 1) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\sin x}$; $\frac{x}{x+\sin x}=\frac{x}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}=\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}$

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ Car $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

---

2) $\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ On pose $\frac{1}{x}=h$ donc : $x\to+\infty\Leftrightarrow h\to 0$ et $\frac{1}{x}=h\Leftrightarrow\frac{1}{h}=x$

$\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(1-\cos h)=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}\times h$ or $\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\frac{1}{2}$

Alors : $\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}\times h=\frac{1}{2}\times 0=0$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+\sin x}}{x}$; $\frac{1-\sqrt{1+\sin x}}{x}=\frac{\left(1-\sqrt{1+\sin x}\right)\left(1+\sqrt{1+\sin x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\sin x}\right)}=\frac{1-1-\sin x}{x\left(1+\sqrt{1+\sin x}\right)}$

$=-\frac{\sin x}{x\left(1+\sqrt{1+\sin x}\right)}=-\frac{\frac{\sin x}{x}}{1+\sqrt{1+\sin x}}$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+\sin x}}{x}=\lim_{x\to 0}-\frac{\frac{\sin x}{x}}{1+\sqrt{1+\sin x}}=-\frac{1}{2}$ Car $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

4) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$ On pose $x-1=h$ donc : $x\to 1\Leftrightarrow h\to 0$ et $x-1=h\Leftrightarrow x=1+h$

$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\pi(h+1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\pi h+\pi)}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{\sin(\pi h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}-\frac{\sin(\pi h)}{\pi h}\times\pi=-\pi$ Car $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1$

5) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$ On pose $x-\frac{\pi}{4}=h$ donc : $x\to\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow h\to 0$ e t $x-\frac{\pi}{4}=h\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+h$

$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)}{h}=\frac{\sin(\mathrm{h})\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos(\mathrm{h})-\left(\cos(\mathrm{h})\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\sin(\mathrm{h})\right)}{h}$

PROF. ATMANI NAJIB

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)}{h}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}2\sin(\mathrm{h})}{h}=\frac{\sqrt{2}\sin(\mathrm{h})}{h}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin(\mathrm{h})}{h}=\sqrt{2}$$

6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{x-\frac{\pi}{2}}$ On pose $x-\frac{\pi}{2}=h$ donc : $x\to\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow h\to 0$ e t $x-\frac{\pi}{2}=h\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+h$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(h)}{h^2}\times h=\frac{1}{2}\times 0=0$$

7) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$" car $\tan\frac{\pi}{4}=1$

On pose $x-\frac{\pi}{4}=h$ donc : $x\to\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow h\to 0$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)-1}{h}$ or : $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan h+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan h\times\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan h+1}{1-\tan h}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{1-\tan h}\times\frac{\tan h}{h}=\frac{2}{1}\times 1=2$$

8) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}$ On pose $x-1=h$ donc : $x\to 1\Leftrightarrow h\to 0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}=1$$

Exercice12 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x^2+x^3}}{|2x+x^2|}$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}$ 4) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$

5) $\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{\frac{x}{x-1}}-x-1$ 6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$ 7) $\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{\sin 3x-3\sin x}$

Solution : 1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x-1}}$

ATMANI NAJIB

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{-2}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{-2}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{-2}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}\right)\text{ car }|x|=x$$

Comme : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}=+\infty$

Alors : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x-1}}=\boxed{0}$

2)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4x^2+x^3}}{\left|2x+x^2\right|}=\lim_{x\to0}\sqrt{\frac{4x^2+x^3}{\left(2x+x^2\right)^2}}=\lim_{x\to0}\sqrt{\frac{x^2(4+x)}{x^2(2+x)^2}}=\lim_{x\to0}\sqrt{\frac{4+x}{(2+x)^2}}=\boxed{1}$$

3) $\lim_{x\to0}\frac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}$:

On a : $\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=-1$

On a : $\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{x+\sqrt{-x}}{x-\sqrt{-x}}=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{\sqrt{-x}\left(-\sqrt{-x}+1\right)}{\sqrt{-x}\left(-\sqrt{-x}-1\right)}=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{-\sqrt{-x}+1}{-\sqrt{-x}-1}=-1$

Donc : $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}=-1}$

4) $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x+1-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$

5) $\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{\frac{x}{x-1}}-x-1=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right)-1=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1\right)\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right)}{\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1}\right)-1$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\frac{x}{x-1}-1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1}\right)-1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x-1}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1}-1=\frac{1}{\sqrt{1}+1}-1=\boxed{-\frac{1}{2}} \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

6) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)\left(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\right)}{\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{1+\sin x-1+\sin x}{\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)\tan x}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x}{\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{2\frac{\sin x}{x}}{\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)\frac{\tan x}{x}}=\frac{2}{2}=\boxed{1}$$

7) $\lim_{x\to0}\frac{x(1-\cos x)}{\sin 3x-3\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x(1-\cos x)}{3\sin x-4\sin^3 x-3\sin x}=-\lim_{x\to0}\frac{x(1-\cos x)}{4\sin^3 x}=-\lim_{x\to0}\frac{x\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)}{4\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3}=-\frac{1}{8}$

Exercice13 : Calculer suivant les valeurs du paramètre réel m la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{m(x-1)^2+(m-1)(x^3-3x)}{3x^2-5x+7}$$

Solution : Calculons $\lim_{x\to+\infty}\frac{m(x-1)^2+(m-1)(x^3-3x)}{3x^2-5x+7}$; avec $m\in\mathbb{R}$

On pose : $f(x)=\frac{m(x-1)^2+(m-1)(x^3-3x)}{3x^2-5x+7}$

→Si $m=1$: $f(x)=\frac{(x-1)^2}{3x^2-5x+7}=\frac{x^2-2x+1}{3x^2-5x+7}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{m(x-1)^2+(m-1)(x^3-3x)}{3x^2-5x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{3x^2-5x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3x^2}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

→Si $m\neq1$:

Alors : le terme de plus haut degré du polynôme est : $(m-1)(x^3-3x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{m(x-1)^2+(m-1)(x^3-3x)}{3x^2-5x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(m-1)(x^3-3x)}{3x^2-5x+7}$$

✓ Si $m\succ1$: $\lim_{x\to+\infty}\frac{m(x-1)^2+(m-1)(x^3-3x)}{3x^2-5x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(m-1)x^3}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}(m-1)x=+\infty$

Si $m\prec1$: $\lim_{x\to+\infty}\frac{m(x-1)^2+(m-1)(x^3-3x)}{3x^2-5x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(m-1)x^3}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}(m-1)x=-\infty$

ATMANI NAJIB

Exercice14 : Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x} & ; si \quad x\succ 0 \\ f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{ax^2} & ; si \quad x\prec 0 \end{cases}$ avec : $a\neq 0$

1) Déterminer : D_f 2) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

3) Déterminer a sachant que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

4) Calculer : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

5) a) Montrer que : $\forall x\in \left]0;+\infty\right[\ ; \ 0\leq f(x)\leq \dfrac{\sqrt{2}}{x}$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x\succ 0 \ et \ 1-\cos x\geq 0 \ et \ x\neq 0\}\cup\{x\in\mathbb{R} / x\prec 0 \ et \ x^2+1\succ 0 \ et \ ax^2\neq 0\}$

On a : $1-\cos x\geq 0$ car $\forall x\in\mathbb{R} \ -1\leq\cos x\leq 1$ et puisque : $x^2+1\succ 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

2) Détermination de : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) Détermination a sachant que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{ax^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)}{ax^2\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-x^2-1}{ax^2\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{a\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\frac{-1}{2a}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{-1}{2a}\Leftrightarrow a=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

4) Détermination de : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

$$si \quad x\prec 0 \ \ f(x)=\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{ax^2}=\frac{\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{ax^2\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{1-x^2-1}{ax^2\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}=-\frac{1}{a\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$

5) a) Montrons que : $\forall x\in \left]0;+\infty\right[\ ;\ 0\le f(x)\le \frac{\sqrt{2}}{x}$

$\forall x\in \left]0;+\infty\right[\ ;\ f(x)=\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$ on a : $-1\le \cos x\le 1$ donc : $-1-\le -\cos x\le 1$ donc : $0\le 1-\cos x\le 2$

Donc : $0\le \sqrt{1-\cos x}\le \sqrt{2}$ et par suite : $0\le \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}\le \frac{\sqrt{2}}{x}$ c'est-à-dire : $0\le f(x)\le \frac{\sqrt{2}}{x}$

b) Déduction de : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a : $\forall x\in \left]0;+\infty\right[\ ;\ 0\le f(x)-0\le \frac{\sqrt{2}}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2}}{x}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Exercice15 : Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{E(x)-x+1}{x^2-4} & ;\ si\quad x\ge 0 \\ f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1} & ;\ si\quad x\prec 0 \end{cases}$

1) Déterminer : D_f 2) a) Vérifier que : $f(x)=\frac{3-x}{x^2-4}$ si $x\in \left]2;3\right[$

b) Vérifier que : $f(x)=\frac{2-x}{x^2-4}$ si $x\in \left]1;2\right[$

c) Etudier la limite de f en 2

---

3) a) Montrer que : $0\prec f(x)\le \frac{1}{x^2-4}$; $\forall x\in \left]2;+\infty\right[$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4) a) Calculer la limite de f à gauche de 0
b) Calculer la limite de f à droite de 0

5) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\ge 0\ et\ x^2-4\ne 0\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}/x\prec 0\ et\ 1-x\ge 0\ et\ \sqrt{1-x}-1\ne 0\right\}$

On a : $x^2-4=0\Leftrightarrow \cancel{x=-2}\ ou\ x=2$

On a : $\sqrt{1-x}-1=0\Leftrightarrow \sqrt{1-x}=1\Leftrightarrow 1-x=1\Leftrightarrow x=0$

On a : $1-x\ge 0\Leftrightarrow x\le 1$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\ge 0\ et\ x\ne 2\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}/x\prec 0\right\}$ c'est-à-dire : $D_f=\mathbb{R}-\left\{2\right\}$

2) a) Vérifions que : $f(x)=\frac{3-x}{x^2-4}$ si $x\in \left]2;3\right[$

Si $x\in \left]2;3\right[$ alors : $E(x)=2\Rightarrow f(x)=\frac{E(x)-x+1}{x^2-4}=\frac{2-x+1}{x^2-4}=\frac{3-x}{x^2-4}$

b) Vérifions que : $f(x)=\frac{2-x}{x^2-4}$ si $x\in \left]1;2\right[$

PROF: ATMANI NAJIB

Si $x \in]1;2[$ alors : $E(x)=1 \Rightarrow f(x)=\frac{E(x)-x+1}{x^2-4}=\frac{1-x+1}{x^2-4}=\frac{2-x}{x^2-4}$

c) Etudions la limite de f en 2 :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{3-x}{x^2-4}="\frac{1}{0}"$$

Donc : $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{2-x}{x^2-4}="\frac{0}{0}"$$ F.I

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{2-x}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-1}{x+2}=\frac{-1}{4}$$

Puisque : $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$ alors la fonction f n'admet pas de limite en 2

3) a) Montrons que : $0 \prec f(x) \leq \frac{1}{x^2-4}$; $\forall x \in]2;+\infty[$

Soit : $x \in]2;+\infty[$

On a: $\forall x \in]2;+\infty[$ $f(x)=\frac{E(x)-x+1}{x^2-4}$ et on a: $x-1 \prec E(x) \leq x$

Donc : $-1 \prec E(x)-x \leq 0$ et $0 \prec E(x)-x+1 \leq 1$ et on a : $x \succ 2 \Rightarrow x^2-4 \succ 0$

Donc : $0 \prec \frac{E(x)-x+1}{x^2-4} \leq \frac{1}{x^2-4}$ c'est-à-dire : $0 \prec f(x) \leq \frac{1}{x^2-4}$; $\forall x \in]2;+\infty[$

b) Déduction de : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Puisque on a : $0 \prec f(x) \leq \frac{1}{x^2-4}$; $\forall x \in]2;+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

Alors : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

4) a) Calcule de la limite de f à gauche de 0

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(\sqrt{1-x}+1\right)\sin x}{\left(\sqrt{1-x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(\sqrt{1-x}+1\right)\sin x}{1-x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}-\left(\sqrt{1-x}+1\right)\times\frac{\sin x}{x}=-2\times 1=-2 \text{ car } \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$$

b) Calculer la limite de f à droite de 0

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{E(x)-x+1}{x^2-4}$$

Si $x \in]0;1[$ alors : $E(x)=0$ donc : $\frac{E(x)-x+1}{x^2-4}=\frac{0-x+1}{x^2-4}=\frac{-x+1}{x^2-4}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x+1}{x^2-4}=\frac{0+1}{0-4}=-\frac{1}{4}$$

PROF: ATMANI NAJIB

5) Montrons que : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

Si : $x\in\,]-\infty;0[$; $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1}$

Donc : $|f(x)|=\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1}\right|=|\sin x|\dfrac{1}{\left|\sqrt{1-x}-1\right|}$

or on a : $x\prec 0\Rightarrow -x\succ 0\Rightarrow 1-x\succ 1\Rightarrow \sqrt{1-x}\succ 1\Rightarrow \sqrt{1-x}-1\succ 0$ et $|\sin x|\le 1$

Donc : $|f(x)|=|\sin x|\dfrac{1}{\sqrt{1-x}-1}\le\dfrac{1}{\sqrt{1-x}-1}$ Si : $x\in\,]-\infty;0[$

Puisque on a : $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}-1}=0$ alors : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF. ATMANI