http://www.xriadiat.com/ **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction série N°4 : *LIMITE D'UNE FONCTION*

Exercice1 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Solution Montrons que : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ \ (\forall x \in D_f)\ 0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$?

On a : $|f(x)| = \left|\frac{x^2}{x^2+1}\right| = \frac{x^2}{x^2+1} \leq x^2$

Soit $\varepsilon \succ 0$ on cherche $\alpha \succ 0$ tel que : $0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Pour avoir $|f(x)| < \varepsilon$ il suffit d'avoir : $x^2 \prec \varepsilon \ \Leftrightarrow |x| \prec \sqrt{\varepsilon}$

Il suffit de prendre : $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$

Donc : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ \ (\alpha = \sqrt{\varepsilon})\, |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Exercice2 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{5x+5}{x+3}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

Solution Montrons que : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ \ (\forall x \in D_f)\ |x-2| < \alpha \Rightarrow |f(x)-3| < \varepsilon$?

On a : $|f(x)-3| = \left|\frac{5x+5}{x+3} - 3\right| = \left|\frac{2x-4}{x+3}\right| = 2\left|(x-2)\frac{1}{x+3}\right| = 2|x-2|\left|\frac{1}{x+3}\right|$

On va ajouter une condition pour pouvoir majorer : $2|x-2|\left|\frac{1}{x+3}\right|$

Soit : $x \in \left]\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right[$ donc : $\frac{3}{2} \prec x \prec \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}+3 \prec x+3 \prec \frac{5}{2}+3 \Rightarrow \frac{9}{2} \prec x+3 \prec \frac{11}{2} \Rightarrow \frac{2}{11} \prec \frac{1}{x+3} \prec \frac{2}{9} \Rightarrow \left|\frac{1}{x+3}\right| \prec \frac{2}{9}$

Donc : $|f(x)-3| \leq \frac{4}{9}|x-2|$ si $x \in \left]\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right[$

Soit $\varepsilon \succ 0$ on cherche $\alpha \succ 0$ tel que : $|x-2| < \alpha \Rightarrow |f(x)-3| < \varepsilon$

Pour avoir $|f(x)-3| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $\frac{4}{9}|x-2| \prec \varepsilon$ c'est à dire : $|x-2| \prec \frac{9\varepsilon}{4}$ et $|x-2| \prec \frac{1}{2}$

Il suffit de prendre α le plus petit des nombres : $\frac{9\varepsilon}{4}$ e t $\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\alpha = \inf\left(\frac{9\varepsilon}{4};\frac{1}{2}\right)$

Donc : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ \ \left(\alpha = \inf\left(\frac{9\varepsilon}{4};\frac{1}{2}\right)\right) |x-2| < \alpha \Rightarrow |f(x)-3| < \varepsilon$

Donc : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

Exercice3 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{2x^2+1}{x}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

PROF: ATMANI NAJIB

Solution Montrons que : $\forall A \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ (\forall x \in D_f)\ 0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) \succ A$?

On a : $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x} = \dfrac{2x^2}{x} + \dfrac{1}{x} = 2x + \dfrac{1}{x}$

On va ajouter une condition pour pouvoir majorer : $2|x-2|\left|\dfrac{1}{x+3}\right|$

Soit : $x \succ 0$ donc : $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x} = \dfrac{2x^2}{x} + \dfrac{1}{x} = 2x + \dfrac{1}{x} \succ \dfrac{1}{x}$

Soit $A \succ 0$ on cherche $\alpha \succ 0$ tel que : $0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) \succ A$

Pour avoir $f(x) \succ A$ il suffit d'avoir $\dfrac{1}{x} \succ A$ c'est à dire : $x \prec \dfrac{1}{A}$

Il suffit de prendre $\alpha = \dfrac{1}{A}$

Donc : $\forall A \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ (\alpha = \dfrac{1}{A})\ 0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) \succ A$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Exercice4 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sin x & si\ x \geq \pi \\ f(x) = \cos x & si\ x \prec \pi \end{cases}$

Etudier la limite de f en $x_0 = \pi$

Solution : Déterminons $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x \succ \pi}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x \prec \pi}} f(x)$?

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x \succ \pi}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x \succ \pi}} \sin x = \sin \pi = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x \prec \pi}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x \prec \pi}} \cos x = cox\pi = -1$

Puisque : $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x \succ \pi}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x \prec \pi}} f(x)$ alors f n'admet pas de limite au point : $x_0 = \pi$

Exercice5 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \dfrac{x^2+1}{x+2}\right)$ 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+1} - 3x\right)$ 3) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \left(\dfrac{x|x-1|}{|x^2-3x|}\right)$ 4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{|x^2-3x+5|}{3|x|+4}\right)$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)\left(\dfrac{2x}{x-1} - 2\right)$ 6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{(x-1)^2 - x^2}{|2x-1|}\right)$

Solution : 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \dfrac{x^2+1}{x+2}\right)$: $2x - \dfrac{x^2+1}{x+2} = \dfrac{x^2+4x-1}{x+2}$

Donc : 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \dfrac{x^2+1}{x+2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+4x-1}{x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+1} - 3x\right)$: On a : $\dfrac{x^2+1}{x+1} - 3x = \dfrac{-2x^2-3x+1}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+1} - 3x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^2-3x+1}{x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -2x = +\infty$

PROF. ATMANI NAJIB

3) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\dfrac{x|x-1|}{|x^2-3x|}\right)$

m	−∞	0		3	+∞
x2−3x	+	0	−	0	+

$x^2-3x\succ 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

$x^2-3x\prec 0 \Leftrightarrow x\in\left]0;3\right[$

$x-1\succ 0 \Leftrightarrow x\in\left]1;+\infty\right[$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x|x-1|}{|x^2-3x|}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(x-1)}{(x^2-3x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2-3x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=\boxed{1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x|x-1|}{|x^2-3x|}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x(-(x-1))}{(x^2-3x)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^2+x}{x^2-3x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^2}{x^2}\right)=\boxed{-1}$$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{|x^2-3x+5|}{3|x|+4}\right)$

Etudions le signe de : x^2-3x+5 $\quad\Delta=-11\prec 0$ et $a\succ 0$ donc : $x^2-3x+5\succ 0$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{|x^2-3x+5|}{3|x|+4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-3x+5}{-3x+4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{-3x}\right)=-\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x\right)=+\infty$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\left(\dfrac{2x}{x-1}-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x-2(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}2=\boxed{2}$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{(x-1)^2-x^2}{|2x-1|}\right)$: On a : $x\to-\infty$ on peut supposer que : $x\prec\dfrac{1}{2}$ alors : $|2x-1|=-(2x-1)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(x-1)^2-x^2}{|2x-1|}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+1-x^2}{-2x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x+1}{-2x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}1=\boxed{1}$$

Exercice6 : Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x+1}{7-3x} & ;\ si\quad x\le 2 \\ f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x-2} & ;\ si\quad x\succ 2\end{cases}$

1)Calculer : $f(2)$

2) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)$; $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

Solution : 1) $f(2)=\dfrac{2\times2+1}{7-3\times2}=\dfrac{5}{7-3\times2}=5$

2) $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}x+3=5$ et $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x+1}{7-3x}=\dfrac{5}{1}=5$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{7-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-3x}=-\dfrac{1}{3}$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice7 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2+20x-1}-x+2025$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{5x^2+x-1}-4x+3$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+3x-7}+2x+5$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-\sqrt{x}$ 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}x+\sqrt{x^2+1}$

Solution : Méthode à suivre : pour calculer : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$

→**Si :**la limite à calculer ne donne pas une forme indéterminée alors la limite s'obtienne de façon direct a l'aide des règles d'opérations sur limites classique

→**Si :** $\sqrt{a}\neq\alpha$: il suffit de factoriser par x a l'intérieur de la racine comme suis :

$$\lim_{|x|\to+\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta=\lim_{|x|\to+\infty}\sqrt{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}+\alpha x+\beta=\lim_{|x|\to+\infty}|x|\sqrt{\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}+\alpha x+\beta$$

Attention : $|x|=\begin{cases}x\ si\ x\to+\infty\\-x\ si\ x\to-\infty\end{cases}$

→**Si :** $\sqrt{a}=\alpha$: On multiplie et on divise par le conjugué puis si nécessaire on factorise par x au numérateur et dénominateur puis simplifier par x et on finit....

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2+20x-1}-x+2025$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}2x^2+20x-1=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2+20x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-x+2025=+\infty$

Par suite : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2+20x-1}-x+2025=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{5x^2+x-1}-4x+3$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}5x^2+x-1=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{5x^2+x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-4x+3=-\infty$

On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{5x^2+x-1}-4x+3=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-4x+3=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-4x+3$$

Comme on a : $x\to+\infty$ alors : $|x|=x$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{5x^2+x-1}-4x+3=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-4x+3=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-4\right)+3$$

Comme on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=0-0=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-4=\sqrt{5}-4\prec0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{5x^2+x-1}-4x+3=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+3x-7}+2x+5$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}4x^2+3x-7=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+3x-7}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}2x+5=-\infty$

On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

PROF: ATMANI NAJIB

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-7}+2x\right)+5=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{4x^2+3x-7}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3x-7}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+3x-7}-2x}\right)+5$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2+3x-7-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x-7}-2x}\right)+5=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-7}{\sqrt{4x^2+3x-7}-2x}\right)+5=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{|x|\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}-2x}\right)+5$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{-x\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}-2x}\right)+5=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3-\frac{7}{x}}{-\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}-2}\right)+5=\left(\frac{3-0}{-\sqrt{4+0-0}-2}\right)+5=-\frac{3}{4}+5=\boxed{\frac{17}{4}}$$

5) $\lim_{x\to-\infty}x+\sqrt{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+1}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}$

Comme on a : $\lim_{x\to-\infty}x-\sqrt{x^2+1}=-\infty$

Alors : $\lim_{x\to-\infty}x+\sqrt{x^2+1}=\boxed{0}$

Exercice8 : Déterminer les limites suivantes :1) $\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{1}{x(x+1)}\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}$ 2) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{x-1-\sqrt{x+1}}$

3) $\lim_{x\to1}\frac{x-3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ 4) $\lim_{x\to4^-}\frac{\sqrt{2-\sqrt{x}}}{x-4}$ 5) $\lim_{x\to-2^-}\frac{\sqrt{x^2+2x}+x+2}{x+2}$ 6) $\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2-x}+2x-2}{x-1}$

Solution :

Remarque : En général on commence par un calcul direct pour voir si c'est une Forme indéterminée ou non.

1) $\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{1}{x(x+1)}\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}$ On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{1}{x(x+1)}\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{1}{x(x+1)}\sqrt{\frac{x^3+1}{x}}=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{-1}{x\sqrt{(x+1)^2}}\sqrt{\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x}}$$

$=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{-1}{x}\sqrt{\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)^2}}=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{-1}{x}\sqrt{\frac{(x^2-x+1)}{x(x+1)}}$ mais on a : $\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}x^2-x+1=3$ et $\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}x(x+1)=0$

Tableau de signe de : $x(x+1)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}x(x+1)=0^+$

PROF. ATMANI NAJIB

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x\prec-1}} \frac{1}{x(x+1)}\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-3x}{x-1-\sqrt{x+1}}$

Directement, on obtient une forme indéterminée du type « $"\frac{0}{0}"$ », il suffit de

Factoriser par (x - 3) au numérateur et au dénominateur puis simplifier :

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{x-1-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)\left(x-1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(x-1-\sqrt{x+1}\right)\left(x-1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to3}\frac{\left(x^2-3x\right)\left(x-1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(x^2-2x+1-x-1\right)}=\lim_{x\to3}\frac{\left(x^2-3x\right)\left(x-1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(x^2-3x\right)}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{x-1-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to3}x-1+\sqrt{x+1}=4$$

3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$

Directement, on obtient une forme indéterminée du type « $"\frac{0}{0}"$ », il suffit de

Factoriser par $\sqrt{x}-1$ au numérateur et au dénominateur puis simplifier :

$$\lim_{x\to1}\frac{x-3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\sqrt{x}-2=1-2=\boxed{-1}$$

4) $\lim\limits_{x\to4^-}\frac{\sqrt{2-\sqrt{x}}}{x-4}=\lim\limits_{x\to4^-}\frac{\sqrt{2-\sqrt{x}}^2}{(x-4)\sqrt{2-\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to4^-}\frac{2-\sqrt{x}}{(x-4)\sqrt{2-\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to4^-}\frac{-\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\sqrt{2-\sqrt{x}}}$

$$\lim_{x\to4^-}\frac{\sqrt{2-\sqrt{x}}}{x-4}=\lim_{x\to4^-}\frac{-1}{\left(\sqrt{x}+2\right)\sqrt{2-\sqrt{x}}}$$

On a : $0\prec x\prec4\ \sqrt{x}\prec2\Rightarrow0\prec2-\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to4^-}\sqrt{2-\sqrt{x}}=0^+$

$$\lim_{x\to4^-}\frac{\sqrt{2-\sqrt{x}}}{x-4}=\boxed{-\infty}$$

5) $\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{\sqrt{x^2+2x}+x+2}{x+2}$: Directement, on obtient une forme indéterminée du type « $"\frac{0}{0}"$ »

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{\sqrt{x^2+2x}+x+2}{x+2}=\lim_{x\to-2^-}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+2}+\frac{x+2}{x+2}=\lim_{x\to-2^-}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+2}+1=\lim_{x\to-2^-}\frac{x^2+2x}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}+1$$

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{\sqrt{x^2+2x}+x+2}{x+2}=\lim_{x\to-2^-}\frac{x(x+2)}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}+1=\lim_{x\to-2^-}\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}+1$$

PROF: ATMANI NAJIB

Puisque : $\lim\limits_{x\to -2^-}\sqrt{x^2+2x}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to -2^-} x=-2$ Alors : $\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{\sqrt{x^2+2x}+x+2}{x+2}=-\infty$

6) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-x}+2x-2}{x-1}$: Directement, on obtient une forme indéterminée du type « $"\frac{0}{0}"$ »

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-x}+2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-x}}{x-1}+\frac{2(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-x}}{x-1}+2=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x}{(x-1)\sqrt{x^2-x}}+2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-x}+2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^2-x}}+2=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}+2$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x^2-x}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}x=1$ Alors : $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-x}+2x-2}{x-1}=+\infty$

Exercice9 : Considérons la fonction f_m définie par : $f_m(x)=mx-\sqrt{x^2+2}$

1) Déterminer : D_{f_m}

2) Calculer suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to+\infty}f_m(x)$

3) Calculer suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to-\infty}f_m(x)$

4) Déterminer : suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to m^+}\frac{mx-\sqrt{x^2+2}}{x-m}$

Solution : 1) $D_{f_m}=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\geq 0\right\}=\mathbb{R}$

2) Calcul suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to+\infty}f_m(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f_m(x)=\lim_{x\to+\infty}mx-\sqrt{x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}mx-\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}mx-|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}$$

Or $x\to+\infty$ donc : $|x|=x$

$$\lim_{x\to+\infty}f_m(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(m-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)$$

Si : $1\prec m$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f_m(x)=+\infty$

Si : $m\prec 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f_m(x)=-\infty$

Si : $m=1$; $f_1(x)=x-\sqrt{x^2+2}=x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}=x-x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}=x\left(1-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)$

$$f_1(x)=x\frac{\left(1-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)}{\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)}=x\frac{1-1-\frac{2}{x^2}}{\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)}=\frac{-2}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=0$

PROF: ATMANI NAJIB

3) Calcul suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim_{x\to-\infty} mx-\sqrt{x^2+2} = \lim_{x\to-\infty} mx-\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} mx-|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}$$

Or $x\to-\infty$ donc : $|x|=-x$

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(m+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)$$

Si : $-1\prec m$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=-\infty$

Si : $m\prec-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=+\infty$

Si : $m=-1$; $f_{-1}(x)=-x-\sqrt{x^2+2}=\dfrac{\left(-x-\sqrt{x^2+2}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+2}\right)}{-x+\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{(-x)^2-\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2}{-x+\sqrt{x^2+2}}$

$$f_{-1}(x)=\frac{x^2-x^2-2}{-x+\sqrt{x^2+2}}=\frac{-2}{-x+\sqrt{x^2+2}}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_{-1}(x)=0$

4) Détermination suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to m^+} \dfrac{mx-\sqrt{x^2+2}}{x-m}$

On a : $\lim\limits_{x\to m^+} \dfrac{mx-\sqrt{x^2+2}}{x-m}=" \dfrac{m^2-\sqrt{m^2+2}}{0^+} "$

Etudions le signe de : $m^2-\sqrt{m^2+2}$

$$m^2-\sqrt{m^2+2}=\frac{\left(m^2-\sqrt{m^2+2}\right)\left(m^2+\sqrt{m^2+2}\right)}{m^2+\sqrt{m^2+2}}=\frac{m^4-m^2-2}{m^2+\sqrt{m^2+2}}$$

Le signe de : $m^2-\sqrt{m^2+2}$ est celui de : m^4-m^2-2 car $m^2+\sqrt{m^2+2}\succ 0$

Etudions le signe de : m^4-m^2-2

On pose : $m^2=X$; $m^4-m^2-2=X^2-X-2$ $\Delta=9\succ 0$ donc : $x_1=2$ et $x_2=-1$

$m^4-m^2-2=(X-2)(X+1)=(m^2-2)(m^2+1)$ On a : $m^2+1\succ 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
m^2-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si : $m\in\left]-\infty;-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2};+\infty\right[$ alors : $m^4-m^2-2\succ 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to m^+} \dfrac{mx-\sqrt{x^2+2}}{x-m}=+\infty$

Si : $m\in\left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right[$ alors : $m^4-m^2-2\prec 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to m^+} \dfrac{mx-\sqrt{x^2+2}}{x-m}=-\infty$

PROF: ATMANI NAJIB

Si : $m=\sqrt{2}$; $\quad \frac{mx-\sqrt{x^2+2}}{x-m}=\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+2}}{x-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+2}\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)}$

$$=\frac{2x^2-x^2-2}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)}=\frac{x^2-2}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)}=\frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)}=\frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}\frac{mx-\sqrt{x^2+2}}{x-m}=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}\frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Si : $m=-\sqrt{2}$; $\quad \frac{-\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+2}}{x+\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+2}}{x+\sqrt{2}}=\frac{\left(-\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+2}\right)\left(-\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)}$

$$=\frac{2x^2-x^2-2}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)}=\frac{x^2-2}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)}=\frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)}=\frac{x-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}}$$

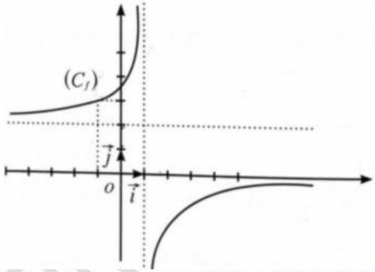
Donc : $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^+}\frac{x-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}}==\frac{-2\sqrt{2}}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice10 : La figure suivante représente la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$

Déterminer, par lecture graphique, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 3) $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ 4) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ 5) $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)-2}$



Solution : Déterminons les limites suivantes par lecture graphique :

La lecture graphique donne :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$ 3) $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=3=f(-1)$

ATMANI NAJIB

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}$: On a : f est négative au voisinage de $+\infty$ car la courbe représentative de f est sous l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^-$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)-2}$: On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-2=0$ et De plus $f(x)\succ 2$ au voisinage de $-\infty$, car la courbe de f se situe au dessus de la droite (D):y = 2 au voisinage de $-\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)-2}=+\infty$

Exercice11 : 1) Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x-1+3\cos x$

a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ 2x-4\le f(x)$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=4x^2-4x\sin x+1$

a) Montrer que : g est paire

b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ \ (2x-1)^2\le f(x)$

c) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Solution : 1)a) Soit x un réel, on a : $-1\le\cos x\le 1$

$\Rightarrow -3\le 3\cos x\le 3\Rightarrow 2x-1-3\le 2x-1+3\cos x\le 2x-1+3\Rightarrow 2x-4\le f(x)$

b) On a : $(\forall x\in\mathbb{R})\ 2x-4\le f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-4=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2)a) $D_g=\mathbb{R}$

- ✓ Si $x\in\mathbb{R}$ alors $-x\in\mathbb{R}$
- ✓ $g(-x)=4(-x)^2-4(-x)\sin(-x)+1=4x^2-4x\sin x+1=g(-x)$

Donc : g est paire

b) Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ \ (2x-1)^2\le f(x)$

Soit : $x\in\mathbb{R}^+$: on a : $-1\le\sin x\le 1$ et $-4x\le 0$ donc : $-4x\le -4x\sin x\le 4x$

Par suite : $4x^2+1-4x\le 4x^2+1-4x\sin x$ c'est à dire : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ \ (2x-1)^2\le f(x)$

c) Déduction : On a : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ \ (2x-1)^2\le f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)^2=\lim\limits_{x\to+\infty}4x^2=+\infty$

Donc, d'après la propriété de limites et ordre : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Calculons : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

On pose : $X=-x$: $x\mapsto-\infty\Rightarrow -x\mapsto+\infty\Rightarrow X\mapsto+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty} f(-X)=\lim\limits_{X\to+\infty} f(X)=+\infty$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice12 : Considérons la fonction f définie par : $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-\left|x^2-4x\right|+3}{x^2+x}$

1) Déterminer : D_f

2) Ecrire l'expression de f(x) sans valeur absolue
3) Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de f

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+x\neq 0\right\}$

$x^2+x=0\Leftrightarrow x\left(x+1\right)=0\Leftrightarrow x=0\ \ ou\ \ x+1=0\Leftrightarrow x=0\ \ ou\ \ x=-1$

$D_f=\mathbb{R}-\left\{-1;0\right\}=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$

2) L'expression de f(x) sans valeur absolue :

$x^2-4x=0\Leftrightarrow x\left(x-4\right)=0\Leftrightarrow x=0\ \ ou\ \ x-4=0\Leftrightarrow x=0\ \ ou\ \ x=4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x^2-4x		+	0	−	0	+	

C'est-à-dire : $\left|x^2-4x\right|=x^2-4x\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;0\right]\cup\left[4;+\infty\right[$ et $\left|x^2-4x\right|=-\left(x^2-4x\right)\Leftrightarrow x\in\left[0;4\right]$

Par conséquent :

Si : $x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left[4;+\infty\right[-\left\{-1\right\}$: $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-x^2+4x+3}{x^2+x}=\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+x}=\dfrac{\left(x+3\right)\left(x+1\right)}{x\left(x+1\right)}=\dfrac{x+3}{x}$

Si : $x\in\left]0;4\right]$: $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2+x^2-4x+3}{x^2+x}=\dfrac{3x^2-4x+3}{x^2+x}$

3) Déterminons les limites de f aux bornes du domaine de f :

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to-1}f\left(x\right)=\lim_{x\to-1}\frac{x+3}{x}=-2$$

$\displaystyle\lim_{x\to0^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{3x^2-4x+3}{x\left(x+1\right)}=+\infty$ car $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}x\left(x+1\right)=0^+$

$$\lim_{x\to0^-}f\left(x\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{x+3}{x}=-\infty$$

Exercice13 : la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

1) Montrer que : $\forall x\succ 0:\left|f\left(x\right)-\dfrac{1}{2}\right|\prec\dfrac{1}{x^2}$

2) En déduire : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)$

Solution : 1) Montrons que : $\forall x\succ 0:\left|f\left(x\right)-\dfrac{1}{2}\right|\prec\dfrac{1}{x^2}$

Soit : $x\in\mathbb{R}_+^*$; $f\left(x\right)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2x-x-\sqrt{1+x^2}}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}=\dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}=\dfrac{x^2-\left(1+x^2\right)}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $f(x)-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2}$

Donc : $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{-1}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2}\right|=\frac{1}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2}$: il suffit de prouver que : $2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2 \succ x^2$

En effet on a : $\sqrt{1+x^2}\succ 0$ alors : $x+\sqrt{1+x^2}\succ x\succ 0$ et comme la fonction : $x\mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ alors : $\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2\succ x^2$ donc : $2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2\succ 2x^2$ et puisque : $2x^2\succ x^2$

D'où : $2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2\succ x^2$ et par suite : $\frac{1}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2}\prec\frac{1}{x^2}$

Donc : $\forall x\succ 0 : \left|f(x)-\frac{1}{2}\right|\prec\frac{1}{x^2}$

2) Déduction :

On a : $\forall x\succ 0 : \left|f(x)-\frac{1}{2}\right|\prec\frac{1}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

Donc : d'après la propriété de limites et ordre : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$

Exercice14 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin\left(x^2-2x\right)}{x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2+3x\right)}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin\left(x+1\right)}{x^2-1}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\left(x^2-3x+2\right)}{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{3x}$ 6) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\tan\left(x^2+3x\right)}{x+3}$ 7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan\left(x^2+\sqrt{3}x\right)}{x}$ 8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\sin x}$

Solution : 1 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin\left(x^2-2x\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin\left(x^2-2x\right)}{x\left(x-2\right)}\times x=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin\left(x^2-2x\right)}{\left(x^2-2x\right)}\times x$

On a : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin\left(x^2-2x\right)}{\left(x^2-2x\right)}=1$ donc : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin\left(x^2-2x\right)}{x-2}=2$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2+3x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x+3\right)\frac{\sin\left(x^2+3x\right)}{x\left(x+3\right)}$ On a : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2+3x\right)}{\left(x^2+3x\right)}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2+3x\right)}{x}=3$ car $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+3\right)=3$

3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin\left(x+1\right)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)\left(x-1\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{\left(x-1\right)}\frac{\sin\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)}$ On a : $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin\left(x+1\right)}{x^2-1}=-\frac{1}{2}$

PROF:ATMANI NAJIB

4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin\left(x^2-3x+2\right)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-2}{x+1}\frac{\sin\left(x^2-3x+2\right)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-2}{x+1}\frac{\sin\left(x^2-3x+2\right)}{\left(x^2-3x+2\right)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-2}{x+1}=-\frac{1}{2}$

Car : $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin\left(x^2-3x+2\right)}{\left(x^2-3x+2\right)}=1$

5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x}-\frac{2}{3}\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$

6) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{\tan\left(x^2+3x\right)}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3}x\frac{\tan\left(x^2+3x\right)}{x(x+3)}=\lim\limits_{x\to-3}x\frac{\tan\left(x^2+3x\right)}{\left(x^2+3x\right)}=\lim\limits_{x\to-3}x=-3$

Car : $\lim\limits_{x\to-3}\frac{\tan\left(x^2+3x\right)}{\left(x^2+3x\right)}=1$

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan\left(x^2+\sqrt{3}x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(x+\sqrt{3}\right)\frac{\tan\left(x^2+\sqrt{3}x\right)}{x\left(x+\sqrt{3}\right)}=\lim\limits_{x\to0}\left(x+\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}$

Car : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan\left(x^2+\sqrt{3}x\right)}{x^2+\sqrt{3}x}=1$

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\sin x}$: On pose $x-\frac{\pi}{4}=X$ Alors : $x=X+\frac{\pi}{4}$ et donc : $x+\frac{\pi}{4}=X+\frac{\pi}{2}$

$x\to\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow X\to0$ et on a : $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(X+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin X$

$\sqrt{2}-2\sin x=\sqrt{2}-2\sin\left(X+\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin X\cos\frac{\pi}{4}-\cos X\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{2}-2\sin x=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin X-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos X\right)=\sqrt{2}\left(1-\cos X-\sin X\right)$

Par suite : $\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\sin x}=\frac{-\sin X}{\sqrt{2}\left(1-\cos X-\sin X\right)}=\frac{-\frac{\sin X}{X}}{\sqrt{2}\left(\frac{1-\cos X}{X}-\frac{\sin X}{X}\right)}$

$$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\sin x}=\lim\limits_{X\to0}\frac{-\frac{\sin X}{X}}{\sqrt{2}\left(\frac{1-\cos X}{X}-\frac{\sin X}{X}\right)}=\frac{-1}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Exercice15 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x\,E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

1) Déterminer : D_f

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$ b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

3) a) Montrer que : $f\left(x\right)=x$ si $x\in\left]\frac{1}{4};1\right]$

b) Etudier la limite de f en 1

4) a) Montrer que : $\sqrt{x}-x\leq f\left(x\right)\leq\sqrt{x}$; $\forall x\in\left]0;1\right[$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to0^+}f\left(x\right)$

6) Soit $k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

a) Montrer que : $f\left(x\right)=\left(k-1\right)x$; $\forall x\in\left]\frac{1}{k^2};\frac{1}{\left(k-1\right)^2}\right[$

b) Montrer que : $f\left(x\right)=kx$; $\forall x\in\left]\frac{1}{\left(k+1\right)^2};\frac{1}{k^2}\right[$

c) Etudier la limite de f en $\frac{1}{k^2}$

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\succ0\right\}=\mathbb{R}_+^*=\left]0;+\infty\right[$

2) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f\left(x\right)=0$

Soit $x\in\left]0;+\infty\right[$

$$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow xE\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0\Leftrightarrow x=0\ ou\ E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0\Leftrightarrow E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0\Leftrightarrow0\prec\frac{1}{\sqrt{x}}\prec1\Leftrightarrow\sqrt{x}\succ1\Leftrightarrow x\succ1$$

$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x\in\left]1;+\infty\right[$

D'où : $S=\left]0;+\infty\right[$

b) Déduction de : $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$

On a : $\forall x\in\left]1;+\infty\right[$; $f\left(x\right)=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$

3) a) Montrons que : $f\left(x\right)=x$ si $x\in\left]\frac{1}{4};1\right]$

Soit $x\in\left]\frac{1}{4};1\right]$ donc : $\frac{1}{4}\prec x\leq1\Rightarrow\frac{1}{2}\prec\sqrt{x}\leq1\Rightarrow1\leq\frac{1}{\sqrt{x}}\prec2\Rightarrow E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=1$

Donc : $f\left(x\right)=xE\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=x\times1=x$

b) Etudions la limite de f en 1

La limite de f à droite en 1 :

On a : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$; $f\left(x\right)=0$ donc : $\lim\limits_{x\to1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^+}0=0$

La limite de f à gauche en 1 :

On a : $f\left(x\right)=x$ si $x\in\left]\frac{1}{4};1\right]$ donc : $\lim\limits_{x\to1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$

PROF ATMANI NAJIB

Puisque : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ alors la fonction f n'admet pas de limite en 1

4) a) Montrons que : $\sqrt{x}-x \leq f(x) \leq \sqrt{x}\ ;\ \forall x \in \left]0;1\right[$

Soit $x \in \left]0;+\infty\right[$

On a : $E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \prec E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+1$ donc : $\frac{1}{\sqrt{x}}-1 \prec E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

Par suite : $x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right) \prec xE\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \leq x\frac{1}{\sqrt{x}}$ c'est-à-dire : $\sqrt{x}-x \prec xE\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \leq \sqrt{x}$

b) Déduction de : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}-x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

6) Soit $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

a) Montrons que : $f(x) = (k-1)x\ ;\ \forall x \in \left]\frac{1}{k^2};\frac{1}{(k-1)^2}\right[$

Soit $x \in \left]\frac{1}{k^2};\frac{1}{(k-1)^2}\right[$ donc : $\frac{1}{k^2} \prec x \prec \frac{1}{(k-1)^2} \Rightarrow \frac{1}{k} \prec \sqrt{x} \prec \frac{1}{(k-1)} \Rightarrow k-1 \prec \frac{1}{\sqrt{x}} \prec k$

Par suite : $E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = k-1$ et alors : $f(x) = xE\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x(k-1)$

b) Montrons que : $f(x) = kx\ ;\ \forall x \in \left]\frac{1}{(k+1)^2};\frac{1}{k^2}\right[$

Soit $x \in \left]\frac{1}{(k+1)^2};\frac{1}{k^2}\right[$ donc : $\frac{1}{(k+1)^2} \prec x \prec \frac{1}{k^2} \Rightarrow \frac{1}{k+1} \prec \sqrt{x} \prec \frac{1}{k} \Rightarrow k \prec \frac{1}{\sqrt{x}} \prec k+1$

Par suite : $E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = k$ et alors : $f(x) = xE\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = kx$

c) Etude de la limite de f en $\frac{1}{k^2}$:

La limite de f à droite en $\frac{1}{k^2}$:

On a : $\forall x \in \left]\frac{1}{k^2};\frac{1}{(k-1)^2}\right[\ ;\ f(x) = (k-1)x$ donc : $\lim\limits_{x\to \frac{1}{k^2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{k^2}^+} (k-1)x = \frac{k-1}{k^2}$

La limite de f à gauche en $\frac{1}{k^2}$:

On a : $f(x) = kx\ ;\ \forall x \in \left]\frac{1}{(k+1)^2};\frac{1}{k^2}\right[$ donc : $\lim\limits_{x\to \frac{1}{k^2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{k^2}^-} kx = \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$

ATMANI NAJIB

Soit $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$; $\frac{1}{k} = \frac{k-1}{k^2} \Leftrightarrow 1 = \frac{k-1}{k} \Leftrightarrow k = k-1 \Leftrightarrow 0 = -1$

Donc : $\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$; $\frac{1}{k} \neq \frac{k-1}{k^2}$

Puisque : $\lim_{x \to \frac{1}{k^2}^-} f(x) \neq \lim_{x \to \frac{1}{k^2}^+} f(x)$ alors la fonction f n'admet pas de limite en $\frac{1}{k^2}$ $\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien