

1er BAC Sciences Mathématiques BLOF

Série N°4 : LIMITE D'UNE FONCTION

(La correction voir <http://www.xriadiat.com/>)

**Exercice1 :** Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}$

Montrer en utilisant la définition que :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

**Exercice2 :** Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{5x+5}{x+3}$

Montrer en utilisant la définition que :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

**Exercice3 :** Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{2x^2+1}{x}$

Montrer en utilisant la définition que :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

**Exercice4 :** Soit la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\begin{cases} f(x) = \sin x & \text{si } x \geq \pi \\ f(x) = \cos x & \text{si } x < \pi \end{cases}$

Etudier la limite de f en  $x_0 = \pi$

**Exercice5 :** Calculer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2x - \frac{x^2+1}{x+2} \right)$     2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2+1}{x+1} - 3x \right)$     3)  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left( \frac{x|x-1|}{|x^2-3x|} \right)$     4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{|x^2-3x+5|}{3|x|+4} \right)$

5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \left( \frac{2x}{x-1} - 2 \right)$     6)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{(x-1)^2 - x^2}{|2x-1|} \right)$

**Exercice6 :** Considérons la fonction f définie par :  $\begin{cases} f(x) = \frac{2x+1}{7-3x} & ; \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2} & ; \text{si } x > 2 \end{cases}$

1) Calculer :  $f(2)$

2) Calculer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

**Exercice7 :** Calculer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2+20x-1} - x + 2025$     2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5x^2+x-1} - 4x + 3$     3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2+3x-7} + 2x + 5$

4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{x}$     5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2+1}$

**Exercice8 :** Déterminer les limites suivantes : 1)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < -1}} \frac{1}{x(x+1)} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$     2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x}{x-1-\sqrt{x+1}}$

3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$     4)  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{2-\sqrt{x}}}{x-4}$     5)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2+2x}+x+2}{x+2}$     6)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-x}+2x-2}{x-1}$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

**Exercice9 :** Considérons la fonction  $f_m$  définie par :  $f_m(x) = mx - \sqrt{x^2+2}$

1) Déterminer :  $D_{f_m}$

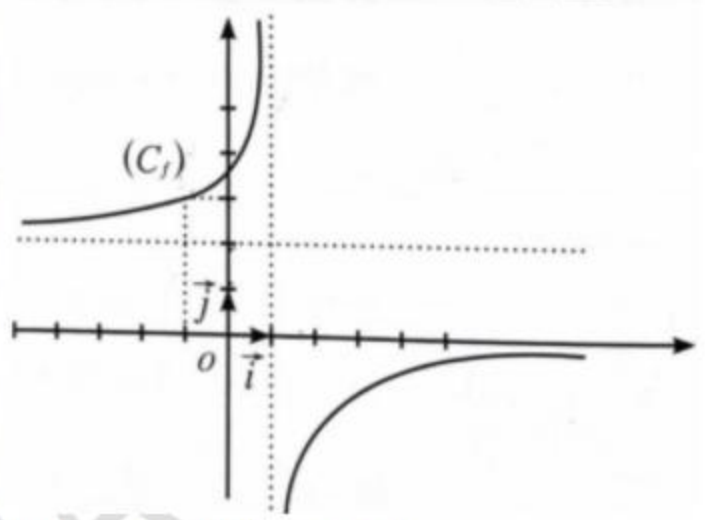
2) Calculer suivant les valeurs de m :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$

3) Calculer suivant les valeurs de m :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x)$

4) Déterminer : suivant les valeurs de m :  $\lim_{x \rightarrow m^+} \frac{mx - \sqrt{x^2+2}}{x-m}$

**Exercice10 :** La figure suivante représente la courbe d'une fonction f définie sur  $\mathbb{R} - \{1\}$ . Déterminer, par lecture graphique, les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$     2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$   
3)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$     4)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$     5)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$   
6)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$     7)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)-2}$



**Exercice11 :** 1) Considérons la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x - 1 + 3\cos x$

a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) 2x - 4 \leq f(x)$

b) En déduire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Considérons la fonction g définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 4x^2 - 4x \sin x + 1$

a) Montrer que : g est paire

b) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (2x-1)^2 \leq f(x)$

c) En déduire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

**Exercice12 :** Considérons la fonction f définie par :  $f(x) = \frac{2x^2 - |x^2 - 4x| + 3}{x^2 + x}$

1) Déterminer :  $D_f$

2) Ecrire l'expression de f(x) sans valeur absolue

3) Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de f

**Exercice13 :** la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

1) Montrer que :  $\forall x > 0 : \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{x^2}$

2) En déduire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**Exercice14 :** Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2-2x)}{x-2}$     2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2+3x)}{x}$     3)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{x^2-1}$     4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-3x+2)}{x^2-1}$

PROF: ATMANI NAJIB

5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{3x}$     6)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\tan(x^2+3x)}{x+3}$     7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x^2+\sqrt{3}x)}{x}$     8)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2} - 2 \sin x}$

**Exercice15 :** Considérons la fonction f définie par :  $f(x) = x E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

1) Déterminer :  $D_f$

2) a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $f(x) = 0$     b) En déduire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3) a) Montrer que :  $f(x) = x$  si  $x \in \left] \frac{1}{4}; 1 \right]$

b) Etudier la limite de f en 1

4) a) Montrer que :  $\sqrt{x} - x \leq f(x) \leq \sqrt{x}$  ;  $\forall x \in ]0; 1[$

b) En déduire :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

6) Soit  $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

a) Montrer que :  $f(x) = (k-1)x$  ;  $\forall x \in \left] \frac{1}{k^2}; \frac{1}{(k-1)^2} \right[$

b) Montrer que :  $f(x) = kx$  ;  $\forall x \in \left] \frac{1}{(k+1)^2}; \frac{1}{k^2} \right[$

c) Etudier la limite de f en  $\frac{1}{k^2}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

