1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°5 : *LIMITE D'UNE FONCTION*

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice1 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \sqrt{|x|}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Solution Montrons que : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ (\forall x \in D_f)\ 0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$?

On a : $|f(x)| = \left|\sqrt{|x|}\right| = \sqrt{|x|}$

Soit $\varepsilon \succ 0$ on cherche $\alpha \succ 0$ tel que : $0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Pour avoir $|f(x)| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $\sqrt{|x|} \prec \varepsilon \iff |x| \prec \varepsilon^2$

Il suffit de prendre $\alpha = \varepsilon^2$

Donc : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ (\alpha = \varepsilon^2)\ |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Exercice2 : Montrer en utilisant la définition que :

1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 + x = 0$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2x+1} = 0$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2+1} = 0$

Exercice3 : Etudier la limite de la fonction : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ en 0.

Solution : On remarque que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$:

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{1+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$$ (on a multiplié par le conjugué)

Donc : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$ d'autre part : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$: $|f(x)-0| = \left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}+1}$

On a aussi : $1+x^2 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{1+x^2}+1 \geq 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} \leq \frac{1}{2}$

Donc : $|f(x)-0| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}+1} \leq \frac{|x|}{2}$ et puisque $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}|x| = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Exercice4 : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

1)Monter que : $\forall x \in \mathbb{R}\ |f(x)-1| \leq (x-1)^2$ 2) En déduire : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Exercice5 : Calculer les limites suivantes :1) $\lim\limits_{x\to -\infty} -x^2+x+2$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{2x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x}{4x-1}}$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$

Solution : 1) Méthode1 : On a : $\lim\limits_{x\to -\infty} -x^2+x+2 = \lim\limits_{x\to -\infty} -x^2\left(1-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} -x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-x^2=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}-x^2+x+2=-\infty$

Méthode2 : On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}-x^2+x+2=\lim\limits_{x\to-\infty}-x^2=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{2x-1}$ Méthode1 : On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{x}\right)}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{2x-1}=+\infty$

Méthode2 : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{4x-1}}$; On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{4x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{4x-1}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$; On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}=+\infty$

Exercice6 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-2}{x-1}$

1) Déterminer : D_f

2) Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$;b) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq0\ et\ x-1\neq0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq0\ et\ x\neq1\}=[0;1[\cup]1;+\infty[$

2)a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}-2}{x-1}$ On trouve une forme indéterminée : "$\frac{+\infty}{+\infty}$"

$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-2}{x-1}=\frac{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1$ car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

b) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$? On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

On a: $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-2}{x-1}=\frac{\sqrt{x}^2+\sqrt{x}-2}{x-1}$

On va factoriser : $\sqrt{x}^2+\sqrt{x}-2$ on pose : $X=\sqrt{x}$ X^2+X-2 $\Delta=9$

Donc : $X=1$ et $X=-2$ par suite : $X^2+X-2=(X-1)(X+2)$

PROF: ATMANI NAJIB

Par suite : $\sqrt{x}^2+\sqrt{x}-2=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)$

Donc : $f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}^2-1^2}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{3}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{x-1}=2$

Exercice7: Calculer $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x+1}{x^2+x-2}$

Solution: On a : $\lim\limits_{x\to1^+}3x+1=4$ et on a : $\lim\limits_{x\to1^+}x^2+x-2=0^+$

x	$-\infty$		-2		1 ←		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	⊕	

Donc $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x+1}{x^2+x-2}=+\infty$

Exercice8 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\dfrac{2x^2-x+3}{1-x}$ 2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}$ 3) $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\dfrac{2x^2+3x-7}{x^2+2x}$ 4) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x\prec3}}\dfrac{2x^2-x+1}{(3-x)(-1-x)}$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x\prec2}}\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^3-8}$ 6) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}}\dfrac{-2x^2+3x}{x-x^3}$

Solution : 1) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\dfrac{2x^2-x+3}{1-x}$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}2x^2-x+3=4$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}1-x=0^-$ car $x\succ1\Rightarrow1-x\prec0$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\dfrac{2x^2-x+3}{1-x}=\boxed{-\infty}$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}$

On a : $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{x^2-1}{x^3}$ et comme : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}}x^2-1=-1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}}x^3=0^+$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}=\boxed{-\infty}$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\dfrac{2x^2+3x-7}{x^2+2x}$

PROF: ATMANI NAJIB

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x\succ -2}} 2x^2+3x-7=-9$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x\succ -2}} x^2+2x=0$

Tableau de signe de : x^2+2x

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x2+2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Alors : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x\succ -2}} x^2+2x=0^-$ et par suite : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x\succ -2}} \dfrac{2x^2+3x-7}{x^2+2x}=+\infty$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x\prec 3}} \dfrac{2x^2-x+1}{(3-x)(-1-x)}$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x\prec 3}} 2x^2-x+1=16$; $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x\prec 3}} (3-x)(-1-x)=0$

Tableau de signe de : $(3-x)(-1-x)$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$p(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Alors : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x\prec 3}} (3-x)(-1-x)=0^-$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x\prec 3}} \dfrac{2x^2-x+1}{(3-x)(-1-x)}=-\infty$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\prec 2}} \dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^3-8}$

On a : $x^3-8=(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$

Alors : $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^3-8}=\dfrac{1}{x-2}\left(1-\dfrac{1}{x^2+2x+4}\right)=\dfrac{1}{x-2}\left(\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2x+4}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\prec 2}} \dfrac{1}{x-2}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\prec 2}} \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2x+4}=\dfrac{11}{12}$

Alors par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\prec 2}} \dfrac{1}{x-2}\left(\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2x+4}\right)=-\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\prec 2}} \dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^3-8}=-\infty$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} \dfrac{-2x^2+3x}{x-x^3}$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} -2x^2+3x=-5$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} x-x^3=0$

PROF: ATMANI NAJIB

Tableau de signe de : $x-x^3=x\left(1-x^2\right)=x\left(1-x\right)\left(1+x\right)$

$x-x^3=0 \Leftrightarrow x\left(1-x^2\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \;\; ou \;\; 1-x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \;\; ou \;\; x=\mp 1$

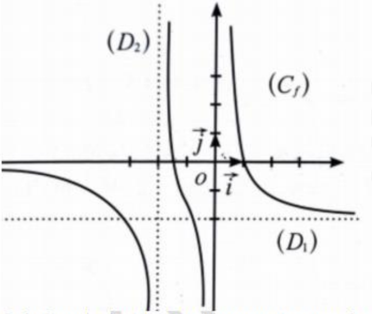
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Alors : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x \succ -1}} x-x^3=0^-$ Ainsi : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x \succ -1}} \dfrac{-2x^2+3x}{x-x^3}=+\infty$

Exercice9 : La figure suivante représente la courbe d'une fonction f
Déterminer, par lecture graphique le domaine de définition de f et les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right)$ 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right)$ 3) $\lim\limits_{x \to 0^+} f\left(x\right)$ 4) $\lim\limits_{x \to 0^-} f\left(x\right)$ 5) $\lim\limits_{x \to -2^+} f\left(x\right)$ 6) $\lim\limits_{x \to -2^-} f\left(x\right)$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f\left(x\right)+1}$ 8) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{f\left(x\right)}$ 9) $\lim\limits_{x \to 1} f\left(x\right)$ 10) $\lim\limits_{x \to -1} f\left(x\right)$



Solution : La lecture graphique montre que : 0 et -2 n'ont pas d'image par f

$D_f=\mathbb{R}-\left\{0;-2\right\}$

Déterminons les limites suivantes par lecture graphique :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right)=-1$ car Au voisinage de $+\infty$; la courbe de f s'approche de la droite d'équation : $y=-1$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right)=0$ car : Au voisinage de $+\infty$; la courbe de f s'approche de l'axe des abscisses;

3) $\lim\limits_{x \to 0^+} f\left(x\right)=+\infty$

4) $\lim\limits_{x \to 0^-} f\left(x\right)=-\infty$

PROF ATMANI NAJIB

5) $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$ car la courbe de f est au-dessus de l'axe des abscisses, et s'approche de la droite d'équation x = - 2

6) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$

7) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{f(x)+1}$: On a : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -1$ donc : $\lim_{x\to +\infty} f(x)+1 = 0^+$

Car la courbe de f se trouve au-dessus de la droite d'équation : y=-1

Donc : $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{f(x)+1} = +\infty$

8) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{f(x)}$: On a : $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0^-$ car la courbe de f est au-dessous de l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$

Donc : $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

9) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = f(1)$ 10) $\lim_{x\to -1} f(x) = 0 = f(-1)$

Exercice10 : Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x^2+x+2} & ;\ si\quad x \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{2x-\sqrt{x^2+3}}{x^2+x-2} & ;\ si\quad x \prec 1 \end{cases}$

1) Déterminer : D_f

2) Calculer les limites suivantes : a) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$;b) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$; c) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ et $\lim_{x\to -2^+} f(x)$

3) Etudier la limite de f en 1

Solution : 1) $D_f = \{x\in\mathbb{R} / x \geq 1\ et\ x^2+x+2 \geq 0\} \cup \{x\in\mathbb{R} / x \prec 1\ et\ x^2+x-2 \neq 0\ et\ x^2+3 \geq 0\}$

Pour : x^2+x+2 $\Delta = -7 \prec 0$ donc : $x^2+x+2 \succ 0$ donc : $x^2+x+2 \neq 0$

Pour : x^2+x-2 $\Delta = 9 \succ 0$ donc : $x^2+x+2 \succ 0$ donc : $x^2+x+2 \neq 0$

Donc : $x = -2$ et $x = 1$

Donc : $D_f = \{x\in\mathbb{R} / x \geq 1\} \cup \{x\in\mathbb{R} / x \prec 1\ et\ x \neq -2\ et\ x \neq 1\}$ car $et\ x^2+3 \geq 0$

Donc : $D_f = \{x\in\mathbb{R} / x \geq 1\} \cup \{x\in\mathbb{R} / x \prec 1\ et\ x \neq -2\} =]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

2) a) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$? si $[1;+\infty[$; $f(x) = x - \sqrt{x^2+x+2}$

Donc : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x - \sqrt{x^2+x+2}$

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+x+2} = x - \sqrt{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)} = x - |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = x - x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

Car : $x \to +\infty$ et donc : $|x| = x$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

$$f(x)=x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)=x\frac{\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=x\frac{1-1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$=x\frac{1-1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=-\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$ et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=-\frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$? si $]-\infty;1[$; $f(x)=\frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{x^2+x-2}=\frac{2x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{x\left(x+1-\frac{2}{x}\right)}=\frac{2x-|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x\left(x+1-\frac{2}{x}\right)}$

Or $x\to-\infty$ donc : $|x|=-x$ et alors : $f(x)=\frac{2x+x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x\left(x+1-\frac{2}{x}\right)}=\frac{x\left(2+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)}{x\left(x+1-\frac{2}{x}\right)}=\frac{2+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x+1-\frac{2}{x}}$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x+1-\frac{2}{x}}=0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}2+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}=3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x+1-\frac{2}{x}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)$?

$\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{x^2+x-2}$ et on a : $\lim\limits_{x\to-2^+}2x-\sqrt{x^2+3}=-4-\sqrt{7}\prec 0$ et $\lim\limits_{x\to-2^+}x^2+x-2=0$

Déterminons le signe de : x^2+x-2

On a : $\Delta=1+8=9$ donc : $x_1=\frac{-1+3}{2}=1$ et $x_2=\frac{-1-3}{2}=-2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim\limits_{x\to-2^+}x^2+x-2=0^-$ et par suite : $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=+\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to-2^-}x^2+x-2=0^+$ et par suite : $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$

3) Etudions la limite de f en 1 :

a) la limite à droite de1 : $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}x-\sqrt{x^2+x+2}=-1$

b) la limite à gauche de1 : $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{x^2+x-2}$

On a : $f(x)=\frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{x^2+x-2}=\frac{\left(2x-\sqrt{x^2+3}\right)\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}{\left(x^2+x-2\right)\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}=\frac{4x^2-x^2-3}{\left(x^2+x-2\right)\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}$

PROF : ATMANI NAJIB

$$f(x)=\frac{3(x^2-1)}{(x^2+x-2)\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}=\frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}=\frac{3(x+1)}{(x+2)\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{3(x+1)}{(x+2)\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}=\frac{1}{2}$

On a : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ donc la fonction f n'admet pas de limite en

Exercice11 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x^2-2x\sin x+1$

1) Montrer que : f est paire

2) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \; ; \; f(x)\geq(x-1)^2$

3) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}$

Si : $x\in\mathbb{R}$ alors $-x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=(-x)^2+2x\sin(-x)+1=x^2-2x\sin x+1=f(x)$

Par suite : f est paire

2) Soit : $x\in\mathbb{R}^+$ on a ; $-1\leq\sin x\leq 1$ donc ; $-1\leq-\sin x$ donc : $-2x\leq-2x\sin x$ car $2x\in\mathbb{R}^+$

Donc : $x^2-2x+1\leq x^2-2x\sin x+1$ c'est-à-dire : $(x-1)^2\leq f(x)$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \; ; \; f(x)\geq(x-1)^2$

3) On a : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \; ; \; f(x)\geq(x-1)^2$ et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)^2=+\infty$ Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Exercice12 : 1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leq\frac{1}{x}$

2) En déduire les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sin x$

Solution : 1) Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leq\frac{1}{x}$

Soit : $x\in\mathbb{R}_+^*$; On a : $|\sin x|\leq 1$ donc : $\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\frac{|\sin x|}{|x|}\leq\frac{1}{x}$

2) a) On a : $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \; ; \; \left|\frac{\sin x}{x}\right|\leq\frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sin x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

Exercice13 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}+2x$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+7}+2x$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+b}+cx$ avec : $a\in\mathbb{R}_+^*$; $b\in\mathbb{R}_+^*$; $c\in\mathbb{R}_+^*$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{4x}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}+2x$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}+2x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+2x=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+2x=\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+2x$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}+2x=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(2-\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right)$ et comme : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}+2x=\boxed{-\infty}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+7}+2x$: on utilise la technique de la multiplication par l expression conjuguée

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+7}+2x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+7}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+7}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+7}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+7-4x^2}{\sqrt{4x^2+7}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{7}{\sqrt{4x^2+7}-2x}$$

Comme : $\lim\limits_{x\to-\infty}4x^2+7=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+7}=+\infty$ et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}-2x=+\infty$

Par suite : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+7}+2x=\boxed{+\infty}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+b}+cx$ avec : $a\in\mathbb{R}_+^*$; $b\in\mathbb{R}_+^*$; $c\in\mathbb{R}_+^*$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+b}+cx=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(a+\frac{b}{x^2}\right)}+cx=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{a+\frac{b}{x^2}}+cx=\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{a+\frac{b}{x^2}}+cx$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+b}+cx=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(a+\frac{b}{x^2}\right)}+cx=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{a+\frac{b}{x^2}}+cx=\lim_{x\to-\infty}x\left(c-\sqrt{a+\frac{b}{x^2}}\right)$$

Car : $|x|=-x$ Comme : $\lim\limits_{x\to-\infty}a+\frac{b}{x^2}=a$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{a+\frac{b}{x^2}}=\sqrt{a}$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}c-\sqrt{a+\frac{b}{x^2}}=c-\sqrt{a}$

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

Si : $c\succ\sqrt{a}$ c'est-à-dire : $c-\sqrt{a}\succ0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+b}+cx=-\infty$

Si : $c\prec\sqrt{a}$ c'est-à-dire : $c-\sqrt{a}\prec0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+b}+cx=+\infty$

Si : $c=\sqrt{a}$ c'est-à-dire : $c-\sqrt{a}=0$ on a: une forme indéterminé du type : $(\infty\times0)$

On utilise la technique de la multiplication par l expression conjuguée/

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+b}+cx=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+b}+\sqrt{a}x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{ax^2+b}-\sqrt{a}x\right)\left(\sqrt{ax^2+b}+\sqrt{a}x\right)}{\left(\sqrt{ax^2+b}-\sqrt{a}x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+b-ax^2}{\left(\sqrt{ax^2+b}-\sqrt{a}x\right)}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+b}+cx=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{b}{\left(\sqrt{ax^2+b}-\sqrt{a}x\right)}$ et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{ax^2+b}-\sqrt{a}x\right)=+\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+b}+cx=\boxed{0}$

4) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{4x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{4x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{4x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{4x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{4}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{4x}=-\frac{1}{4}$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

Exercice14 :1) Calculer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{x^2+x+1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^n}{x^2+x+1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

c) Soit : a ; b et c des nombres réels tel que : $a \succ 0$

Calculer suivant les valeurs de a la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{ax^2+bx+c}$

Solution : 1) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{x^2+x+1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{x^2+x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{x^2}$$

Si : $n=1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \boxed{0}$

Si : $n=2$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2+x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \boxed{1}$

Si : $n \succ 2$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{x^2+x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{n-2} = \boxed{+\infty}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^n}{x^2+x+1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^n}{x^2+x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^n}{x^2}$$

Si : $n=1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2+x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = \boxed{0}$

Si : $n=2$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2+x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \boxed{1}$

Si : $n \succ 2$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^n}{x^2+x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^n}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} x^{n-2}$

- ✓ **Si :** n est pair alors : $n-2$ est pair donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^n}{x^2+x+1} = +\infty$
- ✓ **Si :** n est impair alors : $n-2$ est impair donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^n}{x^2+x+1} = -\infty$

c) Soit : a ; b et c des nombres réels tel que : $a \succ 0$

Calculons suivant les valeurs de a la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{ax^2+bx+c}$

PROF: ATMANI NAJIB

$$\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to+\infty} x-|x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}\right)$$

Puisque : $\lim_{x\to+\infty} a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}=a$ alors : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}=\sqrt{a}$

Par suite : $\lim_{x\to+\infty} 1-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}=1-\sqrt{a}$ et comme : $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

Alors : on déduit, d'après les propriétés sur la limite d'un produit, que:

Si : $1-\sqrt{a}\succ 0$: c'est-à-dire : $0\prec a\prec 1$ $\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}\right)=+\infty$

Si : $1-\sqrt{a}\prec 0$: c'est-à-dire : $a\succ 1$ $\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}\right)=-\infty$

Si : $a=1$: alors les propriétés sur la limité d'un produit ne permet pas conclure (forme indéterminée de type "$0\times\infty$"), pour lever l'indétermination,

On utilise la technique de multiplication par l'expression conjuguée :

$$\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+bx+c}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+bx+c}\right)\left(x-\sqrt{x^2+bx+c}\right)}{x+\sqrt{x^2+bx+c}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-bx-c}{x+\sqrt{x^2+bx+c}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+bx+c}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{bx+c}{x+\sqrt{x^2+bx+c}}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x\left(b+\frac{c}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{b+\frac{c}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}$$

Puisque : $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}=1$ alors : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}=\sqrt{1}=1$

Par suite : $\lim_{x\to+\infty} 1+\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}=2$ et on a : $\lim_{x\to+\infty} b+\frac{c}{x}=b$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+bx+c}=-\frac{b}{2}$

Exercice15 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x-3\sin x}{5x}$ 2) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ 3) $\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{\cos(x-1)-1}$ 4) $\lim_{x\to0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$

5) $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{x^2}$ 6) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$ 7) $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\cos x-\cos^2 x}$ 8) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan x}$

9) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos 2x-\cos 4x}}{x}$

PROF: ATMANI NAJIB

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 2x-3\sin x}{5x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 2x}{5x}-3\frac{\sin x}{5x}=\frac{2}{5}-\frac{3}{5}=-\frac{1}{5}$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}4\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}=4\times\frac{1}{2}=2$

3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{\cos(x-1)-1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{h^2}{\cos h-1}$ On pose $x-1=h$ donc : $x\to1\Leftrightarrow h\to0$

$$=\lim_{h\to0}-\frac{h^2}{1-\cos h}=-2 \text{ car : } \lim_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\frac{1}{2}$$

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-1+\cos 2x+1-\cos 4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-1+\cos 2x}{x^2}+\frac{1-\cos 4x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}-4\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}+16\frac{1-\cos 4x}{(4x)^2}=-4\times\frac{1}{2}+16\times\frac{1}{2}=-2+8=6$

5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}4\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}-\frac{\sin^2 x}{x^2}=4\times1-1=3$

6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x-2\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin x}{x}\frac{(1-\cos x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}=-2\times1\times\frac{1}{2}=-1$

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\cos x-\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\times\frac{x^2}{1-\cos x}=\frac{1}{\cos 0}\times2=1\times2=2$

8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}\times x^2}\,\frac{1}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}\,\frac{|x|}{\tan x}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}\,\frac{x}{\tan x}=\sqrt{\frac{1}{2}}\times1=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0^-}-\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}\,\frac{x}{\tan x}=-\sqrt{\frac{1}{2}}\times1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos 2x-\cos 4x}}{x}\ \lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{-1+\cos 2x+1-\cos 4x}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{-1+\cos 2x}{x^2}+\frac{1-\cos 4x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}\sqrt{-4\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}+16\frac{1-\cos 4x}{(4x)^2}}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{\cos 2x-\cos 4x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}\sqrt{-4\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}+16\frac{1-\cos 4x}{(4x)^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x}\sqrt{-4\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}+16\frac{1-\cos 4x}{(4x)^2}}=\sqrt{6}$

Exercice16 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}}{2+x} & ;\ si\ \ x\geq0 \\ f(x)=\dfrac{\cos x-\sqrt{1+\sin x}}{x} & ;\ si\ \ x\prec0 \end{cases}$

PROF: ATMANI NAJIB

1) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 2) Etudier : $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

3) a) Montrer que : $\forall x \prec 0 \; ; \; |f(x)| \le \frac{1+\sqrt{2}}{|x|}$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Solution : 1) Déterminons : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}}{2+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2+x}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2+x}\left(\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2+x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2+x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}+1=1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=\sqrt{1}=1$ et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$

2) Etudions : $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}}{2+x}$ et Puisque $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}=-1$: et $\lim\limits_{x\to0^+} 2+x=2$

  Alors : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{\cos x-\sqrt{1+\sin x}}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{\left(\cos x+\sqrt{1+\sin x}\right)\left(\cos x-\sqrt{1+\sin x}\right)}{x\left(\cos x+\sqrt{1+\sin x}\right)}$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{\cos^2 x-1-\sin x}{x\left(\cos x+\sqrt{1+\sin x}\right)} = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{\cos x+\sqrt{1+\sin x}}\left(\frac{\cos^2 x-1}{x}-\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{-1}{\cos x+\sqrt{1+\sin x}}\left(x\frac{1-\cos^2 x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{2}\times\left(0\frac{1}{2}+1\right) = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

3) a) Montrons que : $\forall x \prec 0 \; ; \; |f(x)| \le \frac{1+\sqrt{2}}{|x|}$

Soit $x \prec 0$: $|f(x)| = \left|\frac{\cos x-\sqrt{1+\sin x}}{x}\right| = \frac{\left|\cos x-\sqrt{1+\sin x}\right|}{|x|}$ or : $\left|\cos x-\sqrt{1+\sin x}\right| \le |\cos x|+\left|\sqrt{1+\sin x}\right|$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $\left|f(x)\right| \leq \frac{|\cos x|+\sqrt{1+\sin x}}{|x|}$ et comme : $|\cos x| \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

Donc : $|\cos x| \leq 1$ et $0 \leq \sin x + 1 \leq 2$

Donc : $|\cos x| \leq 1$ et $0 \leq \sqrt{\sin x + 1} \leq \sqrt{2}$

Donc : $|\cos x| + \sqrt{1+\sin x} \leq 1+\sqrt{2}$

Par suite : $\frac{|\cos x|+\sqrt{1+\sin x}}{|x|} \leq \frac{1+\sqrt{2}}{|x|}$

D'où : $\forall x \prec 0$; $\left|f(x)\right| \leq \frac{1+\sqrt{2}}{|x|}$

b) Déduisons : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$:

On a : $\forall x \prec 0$; $\left|f(x)-0\right| \leq \frac{1+\sqrt{2}}{|x|}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1+\sqrt{2}}{|x|} = 0$

Donc, d'après la propriété de limites et ordre : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Exercice17 : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \frac{|x|-1}{1-\left|2x^2-x\right|}$

1) Déterminer : D_f

2) Ecrire $f(x)$ sans symbole de la valeur absolue :

3) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

4) Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

5) Etudier la limite de f en 1

6) Etudier la limite de f en $-\frac{1}{2}$

Solution : 1) $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / 1-\left|2x^2-x\right| \neq 0\right\}$

On a : $1-\left|2x^2-x\right| = 0 \Leftrightarrow \left|2x^2-x\right| = 1 \Leftrightarrow 2x^2-x=1 \ ou \ 2x^2-x=-1 \ \Leftrightarrow 2x^2-x-1=0 \ ou \ 2x^2-x+1=0$

Pour : $2x^2-x-1=0$; $\Delta = 9 \succ 0$ donc : $x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Pour : $2x^2-x+1=0$; $\Delta = -7 \prec 0$

Donc : $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \ et \ x \neq -\frac{1}{2}\right\} = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$

2) Ecrire $f(x)$ sans symbole de la valeur absolue :

On a : $2x^2-x=0 \Leftrightarrow x(2x-1)=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x=0 \ ou \ 2x-1=0 \ \Leftrightarrow x=0 \ ou \ x=\frac{1}{2}$

PROF: ATMANI NAJIB

x	$-\infty$ $\quad 0 \quad$ $1/2$ $\quad +\infty$				
$2x^2-x$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\forall x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$; On a : $|x|=x$ et $\left|2x^2-x\right|=2x^2-x$ par suite : $f(x)=\dfrac{x-1}{1+x-2x^2}$

$\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$; On a : $|x|=x$ et $\left|2x^2-x\right|=-2x^2+x$ par suite : $f(x)=\dfrac{x-1}{1+2x^2-x}$

$\forall x \in \left]-\infty;0\right]$; On a : $|x|=-x$ et $\left|2x^2-x\right|=2x^2-x$ par suite : $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2-x-1}$

Donc : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{1+x-2x^2} & ; si \quad x \geq \dfrac{1}{2} \\ f(x)=\dfrac{x-1}{2x^2-x+1} & ; si \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2-x-1} & ; si \quad x \prec 0 \end{cases}$

3) Calcul de : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{1+x-2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{-2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-2x} = 0$$

4) Calcul de : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

5) Etude de la limite de f en 1 :

On a : $f(x)=\dfrac{x-1}{1+x-2x^2} \quad ; si \quad x \geq \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{1+x-2x^2} = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{-2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{x\to1} \frac{1}{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{3}$$

6) Etude de la limite de f en $-\frac{1}{2}$:

On a :

x	$-\infty$ $\quad -1/2$ $\quad 1$ $\quad +\infty$				
$2x^2-x-1$	$+$	0	$-$	0	$+$

TMANI NAJIB

Donc : $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^{+}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^{-}} f(x) = +\infty$

Exercice18 : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{xE(x)}{x + E(x)}$

1) a) Montrer que : $E(x) = -x \Leftrightarrow x = 0$ b) En déduire : D_f

2) a) Simplifier $f(x)$ si $x \in]0;1[$

b) Vérifier que : $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ si $x \in]-1;0[$

c) Etudier la limite de f en 0

3) a) Montrer que : $\dfrac{x^2 - x}{2x} \le f(x) \le \dfrac{x^2}{2x-1}$; $\forall x \in]1;+\infty[$

b) En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

4) Etudier la limite de f en 1

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $xE(x) = x + E(x)$

Solution : $f(x) = \dfrac{xE(x)}{x + E(x)}$

1) a) Montrons que : $E(x) = -x \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow$) Supposons que : $E(x) = -x$

Puisque $E(x) \in \mathbb{Z}$ alors : $-x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

$E(x) = -x \Rightarrow x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Leftarrow$) Supposons que : $x = 0$

$E(0) = 0 = -0$

Finalement : $E(x) = -x \Leftrightarrow x = 0$

b) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x + E(x) \neq 0\}$

On a : $x + E(x) = 0 \Leftrightarrow E(x) = -x \Leftrightarrow x = 0$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

2) a) Simplification de $f(x)$ si $x \in]0;1[$

Soit $x \in]0;1[$ donc : $E(x) = 0$ et donc : $f(x) = \dfrac{xE(x)}{x + E(x)} = \dfrac{x \times 0}{x + 0} = 0$

Donc : $f(x) = 0$ si $x \in]0;1[$

b) Vérifions que : $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ si $x \in]-1;0[$

Soit $x \in]-1;0[$ donc : $E(x) = -1$ et donc : $f(x) = \dfrac{xE(x)}{x + E(x)} = \dfrac{xE(x)}{x + E(x)} = \dfrac{x \times (-1)}{x + (-1)} = \dfrac{-x}{x-1} = \dfrac{x}{1-x}$

Donc : $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ si $x \in]-1;0[$

c) Etudions la limite de f en 0

La limite de f à droite en 0 : On a $f(x)=0$ si $x\in]0;1[$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 0=\boxed{0}$

La limite de f à gauche en 0 : On a $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ si $x\in]-1;0[$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{1-x}=\boxed{0}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ alors : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

3) a) Montrons que : $\dfrac{x^2-x}{2x}\le f(x)\le\dfrac{x^2}{2x-1}$; $\forall x\in]1;+\infty[$

Soit $x\in]1;+\infty[$

On a : $E(x)\le x\prec E(x)+1$

Donc : $2x-1\prec x+E(x)\le 2x$

Donc : $\dfrac{1}{2x}\le\dfrac{1}{x+E(x)}\prec\dfrac{1}{2x-1}$

On a : $x-1\prec E(x)\le x$ Donc : $x^2-x\prec xE(x)\le x^2$

Donc : $\dfrac{x^2-x}{2x}\le\dfrac{xE(x)}{x+E(x)}\le\dfrac{x^2}{2x-1}$

b) Déduction de : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a : $\dfrac{x^2-x}{2x}\le\dfrac{xE(x)}{x+E(x)}\le\dfrac{x^2}{2x-1}$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

4) Etude de la limite de f en 1

La limite de f à droite en 1 : On a si $x\in]1;2[$; $E(x)=1$ et donc : $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x+1}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$

La limite de f à gauche en 1 :

On a si $x\in]0;1[$; $E(x)=0$ et donc : $f(x)=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 0=\boxed{0}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ alors la fonction f n'admet pas de limite en 1

5) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $xE(x)=x+E(x)$

$xE(x)=x+E(x)\Leftrightarrow xE(x)-E(x)=x\Leftrightarrow (x-1)E(x)=x$: (E)

Si : $x=1$ (E) devient : $0=1$ impossible donc : $x\ne 1$

$(E)\Leftrightarrow E(x)=\dfrac{x}{x-1}\Leftrightarrow E(x)=\dfrac{x-1}{x-1}+\dfrac{1}{x-1}\Leftrightarrow E(x)=1+\dfrac{1}{x-1}\Leftrightarrow E(x)-1=\dfrac{1}{x-1}$

PROF. ATMANI NAJIB

Puisque : $E(x)\in\mathbb{Z}$ donc : $E(x)-1\in\mathbb{Z}$ et donc : $\frac{1}{x-1}\in\mathbb{Z}$

Donc : $\exists k\in\mathbb{Z}^*$ tel que : $\frac{1}{x-1}=k$ et donc : $x-1=\frac{1}{k}$ c'est-à-dire : $x=\frac{1}{k}+1$ avec $k\in\mathbb{Z}^*$

Inversement :

Si $k>1$ alors $0<\frac{1}{k}<1\Rightarrow 1<\frac{1}{k}+1<2\Rightarrow 1<x<2\Rightarrow E(x)=1$

(E) Devient : $x-1=x\Leftrightarrow -1=0$ impossible

Si $k\le -1$ alors $-1\le\frac{1}{k}<0\Rightarrow 0\le\frac{1}{k}+1<1\Rightarrow 0\le x<1\Rightarrow E(x)=0$

(E) Devient : $0=x$ impossible car $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

Si $k=1$ alors : $\frac{1}{x-1}=k\Leftrightarrow\frac{1}{x-1}=1\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2$

(E) Devient : $(2-1)E(2)=2\Leftrightarrow E(2)=2$ vraie donc : $x=2$ solution

Conclusion : $S=\{2\}$

Exercice20 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=E\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$ avec : $n\in\mathbb{N}^*$

Etudier et Déterminer (s'il existe) les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{x\to n}f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to n+1}f(x)$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to n}f(x)$

- Calculons : $\lim\limits_{x\to n^+}f(x)$????

$$n<x<n+1\Rightarrow 1<\frac{x}{n}\Rightarrow 1<\sqrt{\frac{x}{n}}<\sqrt{\frac{n+1}{n}}\Rightarrow 1<\sqrt{\frac{x}{n}}<\sqrt{1+\frac{1}{n}}\Rightarrow 1\le E\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)<E\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$$

$\lim\limits_{x\to n^+}f(x)=1$ Car on a : $\lim\limits_{x\to n^+}E\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)=1$

- Calculons : $\lim\limits_{x\to n^-}f(x)$????

$$0\le x<n\Rightarrow 0\le\frac{x}{n}<1\Rightarrow 0\le\sqrt{\frac{x}{n}}<1\Rightarrow f(x)=E\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)=0$$

$\lim\limits_{x\to n^-}f(x)=\lim\limits_{x\to n^-}0=0$

Puisque : $\lim\limits_{x\to n^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to n^+}f(x)$ alors la fonction f n'admet pas de limite en n

Même démarche pour : 2) $\lim\limits_{x\to n+1}f(x)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: AT