http://www.xriadiat.com/ **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction série N°6 : *LIMITE D'UNE FONCTION*

PROF. ATMANI NAJIB

Exercice1 : Montrer en utilisant la définition que :

1) $\lim\limits_{x\to 0} 3x^2-5x+1=-1$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{4x+1}=3$

Exercice2 : 1) Monter que : $\forall x\in\left]-\infty;-2\right[$: $\dfrac{\cos^2 x+1}{(x-2)^3}\leq\dfrac{1}{(x-2)^3}$

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\cos^2 x+1}{(x-2)^3}$

Solution : 1) Pour : $x\in\left]-\infty;-2\right[$ $\cos^2 x+1\geq 1$ et $(x-2)^3\prec 0$ donc : $\dfrac{\cos^2 x+1}{(x-2)^3}\leq\dfrac{1}{(x-2)^3}$

2)comme : $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{(x-2)^3}=-\infty$ Alors : $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\cos^2 x+1}{(x-2)^3}=-\infty$

Exercice3 : Calculer les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+5x^2-7x^4$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+5x^2-7x^4=\lim\limits_{x\to+\infty}-7x^4=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-7x^4}{14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{2}=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^5}{2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{x}=0$

4) On a : $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1}x^3+1=2$ Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}=+\infty$

5) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\dfrac{1+\dfrac{1}{x^3}}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{x^3}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{1}{x}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

Exercice4 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt{2x^2+1}$

5) $\lim_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{x^2+x+1}$

6) $\lim_{x\to+\infty} x-2\sqrt{x}+3$

7) $\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{1-x}$

8) $\lim_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{4x^2+1}$

9) $\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+4}$

10) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-\sqrt{x^2+1}}$

11) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}}$

12) $\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+x+1}$

13) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$

14) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{4x+1}$

15) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+\sqrt{x}}$

16) $\lim_{|x|\to+\infty} \sqrt{x^2+x+3}$

17) $\lim_{|x|\to+\infty} \sqrt{x^2+x+3}+2x$

18) $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}$

19) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x+3}-\sqrt{x}$

20) $\lim_{|x|\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

21) $\lim_{|x|\to+\infty} \sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}$

22) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^3+2}}$

23) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{\sqrt{2-x}}$

24) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x}+x-1$

25) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{2x^2+1}$

26) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

Solution : 1) $\lim_{x\to2} \sqrt{2x}-2=0$ et $\lim_{x\to2} x^2+3x-10=0$; On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{2x}-2\right)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{\left(x^2+3x-10\right)\left(\sqrt{2x}+2\right)}=\lim_{x\to2}\frac{(2x-4)}{\left(\sqrt{2x}+2\right)}\times\frac{1}{(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to2}\frac{2}{\left(\sqrt{2x}+2\right)}\times\frac{1}{(x+5)}=\frac{2}{14}$$

2) $\lim_{x\to1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$? On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

On a : $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$ et $2x^3+3x^2-4x-1=(x-1)\left(2x^2+5x+1\right)$

Donc : $\lim_{x\to1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(2x^2+5x+1\right)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+5x+1}{x^2+x+1}=\frac{8}{3}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$? On a : $\lim_{x\to+\infty}x^2+x=+\infty$ donc : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$

On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

Or $x\to+\infty$ donc : $|x|=x$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}=\frac{1}{2}$$

4) $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{2x^2+1}$? On a : $\lim_{x\to+\infty}2x^2+1=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ donc : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+1}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

On a : $x-\sqrt{2x^2+1}=x-\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}=x-\sqrt{x^2}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}=x-|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}$

Or $x\to+\infty$ donc : $|x|=x$

Donc : $x-\sqrt{2x^2+1}=x-x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}=x\left(1-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)$ et puisque : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ e $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

Et comme : $\lim_{x\to+\infty}1-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}=1-\sqrt{2}\prec 0$

PROF: ATMANI NAJIB

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{2x^2+1}=-\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{x^2+x+1}$? ; On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x=-\infty$

On trouve une forme indéterminée : $"+\infty-\infty"$

$$2x+\sqrt{x^2+x+1}=2x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}=2x+\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=2x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

Or $x\to-\infty$ donc : $|x|=-x$

Donc : $2x+\sqrt{x^2+x+1}=2x-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$ et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

Et donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} 2-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=2-1=1$

Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{x^2+x+1}=-\infty$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2\sqrt{x}+3$? ; On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} -2\sqrt{x}=-\infty$ On trouve une forme indéterminée : $"+\infty-\infty"$

On a : $x-2\sqrt{x}+3=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-2+\frac{3}{\sqrt{x}}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x}}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2\sqrt{x}+3=+\infty$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{1-x}$? ; On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=+\infty$ On trouve une forme indéterminée : $"+\infty-\infty"$

On a : $x+\sqrt{1-x}=x+\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x}{x^2}\right)}=x+\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}=x+|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}$

Or $x\to-\infty$ donc : $|x|=-x$

Donc : $x+\sqrt{1-x}=x-x\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}=x\left(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)$ et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{1-x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)=-\infty$ Car $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}=1$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{4x^2+1}$? ; On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{4x^2+1}=-\infty$ On trouve une forme indéterminée : $"+\infty-\infty"$

On a : $2x-\sqrt{4x^2+1}=\dfrac{\left(2x-\sqrt{4x^2+1}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)}{2x+\sqrt{4x^2+1}}=\dfrac{4x^2-4x^2-1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}=\dfrac{-1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{4x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}=0$ Car $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\sqrt{4x^2+1}=+\infty$

PROF.ATMANI NAJIB

9) $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+4}$? ; On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4}=+\infty$ On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

On a : $x+\sqrt{x^2+4}=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)}{x-\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{x^2-x^2-4}{x-\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{-4}{x-\sqrt{x^2+4}}$ et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x-\sqrt{x^2+4}=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4}{x-\sqrt{x^2+4}}=0$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2+1}}$? ; On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

On a : $\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\dfrac{x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2-x^2-1}=-x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}-x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+1}=+\infty$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}}$?

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$ On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

On a : $\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}=\dfrac{\left(x^2-x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}{\left(x^2+1-x^2-2\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}=-\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}{x+\sqrt{x^2-1}}=-\dfrac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x+\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

Or $x\to+\infty$ donc : $|x|=x$ et par suite : $\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}}=-\dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-2$

12) $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+x+1}$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

On a: $x+\sqrt{x^2+x+1}=x+\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$ Or $x\to-\infty$ donc: $|x|=-x$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $x+\sqrt{x^2+x+1}=x-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=x-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=x\left(\frac{\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\right)$

$$x+\sqrt{x^2+x+1}=x\left(\frac{1-1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\right)=-\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\right)=-\frac{1}{2}$ Car $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

13) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$; On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\sqrt{x^2+1}=+\infty$ On trouve une forme indéterminée : $"\frac{-\infty}{+\infty}"$

On a: $\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\frac{x}{1+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{x}{1-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ car $x\to-\infty$ c'est-à-dire : $|x|=-x$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x\left(\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$$ Car $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{4x+1}$; On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x+1}=+\infty$ On trouve une forme indéterminée : $"+\infty-\infty"$

On a: si $x\in[0;+\infty[$: $\sqrt{x+1}-\sqrt{4x+1}=\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}=\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{x}\sqrt{4+\frac{1}{x}}=\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x}}\right)$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x}}=1-2=-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{4x+1}=-\infty$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{1+\sqrt{x}}$; On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\sqrt{x}=+\infty$ On trouve une forme indéterminée : $"\frac{+\infty}{+\infty}"$

On a: si $x\in[0;+\infty[$: $\frac{x}{1+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}^2}{\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}$ et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{1+\sqrt{x}}=+\infty$

16) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2+x+3=\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2=+\infty$ donc : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}=+\infty$

17) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}+2x$

a) On a: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}+2x$

PROF: ATMANI NAJIB

b) On a: $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+3}=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$ On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+3}+2x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)}+2x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}+2x=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{1+\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}+2x$$

Or $x\to-\infty$ donc: $|x|=-x$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+3}+2x=\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{1+\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}+2x=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+2\right)=-\infty \text{ car } \lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}+2=1$$

18) $\lim_{x\to+\infty}1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}$ On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to+\infty}1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{x}{2}-\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{x}{2}-|x|\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)}$$

$x\to+\infty$ donc: $|x|=x$

$$\lim_{x\to+\infty}1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}=\lim_{x\to+\infty}1+x\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)}\right)=+\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}-\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{2}$$

19) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+3}-\sqrt{x}$ On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+3}-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sqrt{2+\frac{3}{x}}-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{2+\frac{3}{x}}-1\right)=+\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2+\frac{3}{x}}-1=\sqrt{2}-1\succ 0$$

20) a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$; On a : $\lim_{x\to+\infty}x-1=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ On trouve une forme indéterminée : "$\frac{+\infty}{+\infty}$"

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

Car : $x\to+\infty$ donc: $|x|=x$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$$

Car : $\lim_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$

b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$; On a : $\lim_{x\to-\infty}x-1=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ On trouve une forme indéterminée : "$\frac{-\infty}{+\infty}$"

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

Car : $x\to-\infty$ donc: $|x|=-x$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$$

Car : $\lim_{x\to-\infty}1-\frac{1}{x}=1$ et $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$

PROF: ATMANI NAJIB

21) On a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{3x-1}{2x+1}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$ donc : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

22) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^3+2}}$; On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^3+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^3+2}}=\sqrt{0}=0$

23) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{\sqrt{2-x}}$; On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=+\infty$

On trouve une forme indéterminée : "$\frac{+\infty}{+\infty}$"

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}{\sqrt{-x\left(1-\frac{2}{x}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}{\sqrt{-x}\sqrt{1-\frac{2}{x}}}\quad |x|=-x \text{ Car : } x\to-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}{\sqrt{-x}\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-x}\frac{\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=+\infty$$

24) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x}+x-1$ On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x}+x-1=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}+x-1=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}+x-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x}+x-1=\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}+x-1=\lim_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}-1\right)-1=\lim_{x\to-\infty}-x\frac{\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}-1\right)\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1\right)}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}-1=\lim_{x\to-\infty}-x\frac{1-\frac{2}{x}-1}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x}+x-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}-1=1-1=0$$

25) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{2x^2+1}$ On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{2x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\ ;\ |x|=-x \text{ Car :}$$

$x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{2x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)=\text{"}+\infty\times\left(1-\sqrt{2}\right)=-\infty$$

26) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=+\infty$$

Exercice5 : Calculer les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1-\sqrt{x^2+1}}$ 2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{-3x+1}{-x^2+2x-1}$

PROF. ATMANI NAJIB

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1+x^2+x^4}}$ 4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{\left|x^2-x-2\right|}$

Solution : 1) On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\sqrt{x^2+1}}="\dfrac{1}{0}"$ déterminons le signe de : $1-\sqrt{x^2+1}$

On a : $x^2+1\geq 0$ donc : $\sqrt{x^2+1}\geq 0\succ 1$ par suite : $\sqrt{x^2+1}\succ 1$ et donc : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $1-\sqrt{x^2+1}\prec 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\sqrt{x^2+1}}=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-3x+1}{-x^2+2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-3x+1}{-\left(x^2-2x+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-3x+1}{-\left(x-1\right)^2}$ et on a : $\lim\limits_{x\to 1}-3x+1=-2$ et $\lim\limits_{x\to 1}-\left(x-1\right)^2=0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-3x+1}{-x^2+2x-1}=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1+x^2+x^4}}$ On a : $x^2+1\leq 1+x^2+x^4$ donc : $\sqrt{x^2+1}\leq\sqrt{1+x^2+x^4}$

Par suite : $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1+x^2+x^4}\leq 0$ et on a : $\lim\limits_{x\to 0}x+1=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1+x^2+x^4}=0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1+x^2+x^4}}=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{\left|x^2-x-2\right|}$ On a : $\left|x^2-x-2\right|\geq 0$; $\forall x\in\mathbb{R}^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{\left|x^2-x-2\right|}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to -1}x=-1$ et $\lim\limits_{x\to -1}\left|x^2-x-2\right|=0^+$

Exercice6 :1) Calculer suivant les valeurs du paramètre réel m les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(m+1\right)x^3+2mx^2-x+7$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(m^2-m\right)x^3+mx^2-\left(m-1\right)x+11$

2) Calculer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n la limite suivante :

$\lim\limits_{x\to +\infty}3x^n-x^3+\left(n-1\right)x^2+7$

Solution : a) Calculons $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(m+1\right)x^3+2mx^2-x+7$ avec $m\in\mathbb{R}$

→Si : $m+1=0$ c'est-à-dire : $m=-1$:

Alors cette limite devient : $\lim\limits_{x\to +\infty}-2x^2-x+7=\lim\limits_{x\to +\infty}-2x^2=-\infty$

→Si : $m\neq -1$ c'est-à-dire : $m=-1$:

Alors : le terme de plus degré du polynôme est : $\left(m+1\right)x^3$

- ✓ Si : $m\succ -1$: alors : $m+1\succ 0$: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(m+1\right)x^3+2mx^2-x+7=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(m+1\right)x^3=\boxed{+\infty}$
- ✓ Si : $m\prec -1$: alors : $m+1\prec 0$: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(m+1\right)x^3+2mx^2-x+7=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(m+1\right)x^3=\boxed{-\infty}$

b) Calculons $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(m^2-m\right)x^3+mx^2-\left(m-1\right)x+11$ avec $m\in\mathbb{R}$

$m^2-m=0\Leftrightarrow m\left(m-1\right)=0\Leftrightarrow m=0$ *ou* $m-1=0\Leftrightarrow m=0$ *ou* $m=1$

PROF: ATMANI NAJIB

→Si : $m=0$

Alors cette limite devient : $\lim\limits_{x\to-\infty} x+11=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

→Si : $m=1$

Alors cette limite devient : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+11=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

→Si : $m\neq 1$et $m\neq 0$: Alors : le terme de plus degré du polynôme est : $\left(m^2-m\right)x^3$

m	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$m2-m$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- ✓ Si : $m\in\left]0;1\right[$: alors : $m^2-m\prec 0$:

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(m^2-m\right)x^3+mx^2-\left(m-1\right)x+11=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(m^2-m\right)x^3=+\infty$

- ✓ Si : $m\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$: alors : $m^2-m\succ 0$:

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(m^2-m\right)x^3+mx^2-\left(m-1\right)x+11=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(m^2-m\right)x^3=-\infty$

2) Calculons suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n la limite suivante :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^n-x^3+\left(n-1\right)x^2+7$ avec $n\in\mathbb{N}^*$

- ✓ Si : $n\succ 3$et $n\in\mathbb{N}^*$: alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^n-x^3+\left(n-1\right)x^2+7=\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^n=+\infty$
- ✓ Si : $n=3$et $n\in\mathbb{N}^*$: alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^n-x^3+\left(n-1\right)x^2+7=\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3-x^3+\left(n-1\right)x^2+7$

  $=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3+\left(n-1\right)x^2+7=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$
- ✓ Si : $0\prec n\prec 3$et $n\in\mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^n-x^3+\left(n-1\right)x^2+7=\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3=-\infty$

Exercice7 : Calculer suivant les valeurs du paramètre réel m la limite suivante :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx$

Solution : On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3x+5=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -mx=+\infty\ ou\ 0\ ou\ -\infty$ suivant le réel m

→Si : $m=0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}=+\infty$

→Si : $m\prec 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} -mx=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=+\infty$

→Si : $m\succ 0$:

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}-mx=\lim\limits_{x\to+\infty}|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}-mx$

Or : $|x|=x$ car $x\to+\infty$

PROF: ATMANI NAJIB

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}-m\right)$ On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}=1$

✓ Si : $0\prec m\prec 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}-m=1-m\succ 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=+\infty$

✓ Si : $m\succ 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}-m=1-m\prec 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=-\infty$

✓ Si : $m=1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x+5}-x\right)\left(\sqrt{x^2-3x+5}+x\right)}{\sqrt{x^2-3x+5}+x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+5-x^2}{\sqrt{x^2-3x+5}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+5}{\sqrt{x^2-3x+5}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-3+\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}=-\frac{3}{2}$$

Conclusion :

→Si : $m\prec 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=+\infty$

→Si : $m=1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=-\frac{3}{2}$

→Si : $m\succ 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=-\infty$

Exercice8 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos x-\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}$ 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$ 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}$

5) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\tan\left(\frac{1}{x}\right)$ 8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin 2x}$

Solution :

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos x-\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}$ On pose $x-\frac{\pi}{4}=h$ donc : $x\to\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow h\to 0$ e t $x-\frac{\pi}{4}=h\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+h$

PROF: ATMANI NAJIB

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos x-\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\sqrt{2}}{h}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos(\mathrm{h})-\sin\frac{\pi}{4}\sin(\mathrm{h})=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\mathrm{h})-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\mathrm{h})$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos x-\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to 0}\frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\mathrm{h})-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\mathrm{h})\right)-\sqrt{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2}\cos(\mathrm{h})-\sqrt{2}\sin(\mathrm{h})-\sqrt{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}-\sqrt{2}h\frac{1-\cos(\mathrm{h})}{h^2}+\sqrt{2}\frac{\sin(\mathrm{h})}{h}=-\sqrt{2}\times 0\times\frac{1}{2}-\sqrt{2}\times 1=-\sqrt{2}$$

2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x-\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$

On pose $x-\frac{\pi}{6}=h$ donc : $x\to\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow h\to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin h}{h}=2\times 1=2$$

3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}$ On pose $x-\frac{\pi}{6}=h$ donc : $x\to\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow h\to 0$ et $x-\frac{\pi}{6}=h\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+h$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-1}{h}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos(\mathrm{h})+\cos\frac{\pi}{6}\sin(\mathrm{h})=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\mathrm{h})+\frac{1}{2}\cos(\mathrm{h})$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{h\to 0}\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\mathrm{h})+\frac{1}{2}\cos(\mathrm{h})\right)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3}\sin(\mathrm{h})+\cos(\mathrm{h})-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\sqrt{3}\frac{\sin(\mathrm{h})}{h}-h\frac{1-\cos(\mathrm{h})}{h^2}=\sqrt{3}$$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}(1-\cos x)$

PROF: ATMANI NAJIB

$$=\lim_{x\to 0} x\frac{x}{\sin x}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=0\times 1\times\frac{1}{2}=0$$

5) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\cos x}{\sin x}$ on a : $\lim\limits_{x\to\pi}1-\cos x=2$ et $\lim\limits_{x\to\pi}\sin x=0$

Étudions le signe de : $\sin x$

x	$\frac{\pi}{2}$ π $\frac{3\pi}{2}$
$\sin(x)$	$+$ 0 $-$

Donc : $\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}=+\infty$

---

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ On pose $\frac{1}{x}=h$ donc : $x\to+\infty\Leftrightarrow h\to 0$ et $\frac{1}{x}=h\Leftrightarrow x=\frac{1}{h}$

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sin(h)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\tan\left(\frac{1}{x}\right)$ On pose $\frac{1}{x}=h$ donc : $x\to+\infty\Leftrightarrow h\to 0$ et $\frac{1}{x}=h\Leftrightarrow x=\frac{1}{h}$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)\tan\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}+1\right)\tan(h)=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(h)}{h}+\tan(h)=1+\tan(0)=1+0=1$$

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\sin x}=\frac{1}{2}$

Exercice9 : Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+3x}-2}{x-\sqrt{x}} & ; si \quad x\neq 1 \\ f(1)=a \end{cases}$

1) Déterminer : D_f

2) Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

3) Déterminer a sachant que : $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=a$

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/1+3x\geq 0 \ et\ x\geq 0 et\ x-\sqrt{x}\neq 0\right\}$

On a : $x-\sqrt{x}=0\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=0 \ ou\ \sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow x=0 \ ou\ \ x=1$

Donc : $D_f=\left]0;+\infty\right[$

2) Calcul des limites suivante :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+3x}-2}{x-\sqrt{x}}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+3x}-2}{x-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x\left(\frac{1}{x}+3\right)}-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{x}+3x}-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+3x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+3x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-1}$$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+3x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-1}=0$

b) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=+\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}-1=0-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{1+3x}-2=-1$

3) Détermination de a sachant que : $\lim\limits_{x\to1} f(x)=a$

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+3x}-2}{x-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\left(\sqrt{1+3x}+2\right)\left(\sqrt{1+3x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+3x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{(1+3x-4)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+3x}+2\right)\left(x^2-x\right)}$$

$$=\frac{(3x-3)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+3x}+2\right)(x-1)}=\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+3x}+2\right)}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+3x}+2\right)}=\boxed{\frac{3}{2}=a}$

Exercice10 : Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x-3} & ;\ si\quad x\prec 3 \\ f(x)=\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-3x} & ;\ si\quad x\succ 3 \end{cases}$

Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

Solution : a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+1}{x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+1}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\frac{2x^2-x+1}{x-3}$: puisque : $\lim\limits_{x\to3^-}2x^2-x+1=16$ et $\lim\limits_{x\to3^-}x-3=0^-$

Donc : $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\frac{2x^2-x+1}{x-3}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x^3-x^2+1}{x^2-3x}$: puisque : $\lim\limits_{x\to3^+}x^3-x^2+1=19$ et $\lim\limits_{x\to3^+}x^2-3x=0$

PROF: ATMANI NAJIB

Tableau de signe de : x^2-3x

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$p(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim\limits_{x\to 3^+} x^2-3x=0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-3x}=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-3x}\times\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^3-3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3}=1$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x-3}\times\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$

Exercice11 : Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\cos x}{\sqrt{x}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} & ;si\quad x\succ 0\\ f(x)=\dfrac{\sin x-\tan x}{x\sqrt{1-\cos x}} & ;si\quad x\prec 0\end{cases}$ et

$f(0)=0$

1) Déterminer : D_f 2) Etudier : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 3) Etudier : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$

4) a) Montrer que : $\forall x\in\left]1+\dfrac{\pi}{2};+\infty\right[\ ;\ |f(x)|\le\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Solution : 1)

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\succ 0\ et\ 1+\sin x\ge 0\ et\ \sqrt{x}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\ne 0\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}/x\prec 0\ et\ 1-\cos x\succ 0\ et\ x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}\cup\{0\}$

On a : $1+\sin x\ge 0$ et $1-\cos x\ge 0$ car $\forall x\in\mathbb{R}\ -1\le\sin x\le 1$ et $-1\le\cos x\le 1$

$1-\cos x=0\Leftrightarrow\cos x=1\Leftrightarrow x=2k\pi\quad k\in\mathbb{Z}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\succ 0\ et\, x\ne\dfrac{\pi}{2}\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}/x\prec 0\ et\ x\ne 2k\pi\quad et\ x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}\cup\{0\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{2k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}^-\right\}\cup\{0\}$

2) Etude de : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$\forall x\in\left]0;+\infty\right[\ ;\ f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\cos x}{\sqrt{x}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{1+\sin x}-\cos x\right)\left(\sqrt{1+\sin x}+\cos x\right)}{\sqrt{x}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(\sqrt{1+\sin x}+\cos x\right)}$

PROF: ATMANI NAJIB

$$f\left(x\right)=\frac{1+\sin x-\cos^2 x}{\sqrt{x}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(\sqrt{1+\sin x}+\cos x\right)}=\frac{\sin^2 x+\sin x}{\sqrt{x}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(\sqrt{1+\sin x}+\cos x\right)}=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\frac{1+\sin x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(\sqrt{1+\sin x}+\cos x\right)}$$

$$f\left(x\right)==\frac{\sin x}{x}\sqrt{x}\frac{1+\sin x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(\sqrt{1+\sin x}+\cos x\right)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\sqrt{x}\frac{1+\sin x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(\sqrt{1+\sin x}+\cos x\right)}=1\times 0\times 0=0$$

$$\forall x\in\left]-\infty;0\right[\ ;\ f\left(x\right)=\frac{\sin x-\tan x}{x\sqrt{1-\cos x}}=\frac{\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{x\sqrt{1-\cos x}}=\frac{\frac{\sin x\cos x-\sin x}{\cos x}}{x\sqrt{1-\cos x}}=\frac{\sin x\left(\cos x-1\right)}{x\cos x\sqrt{1-\cos x}}$$

$$=-\frac{\sin x}{x}\frac{\sqrt{1-\cos x}^2}{\cos x\sqrt{1-\cos x}}=-\frac{\sin x}{x}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0^-}-\frac{\sin x}{x}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\cos x}=-1\times 0=0$$

Donc : $\lim_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0^-} f\left(x\right)=0$

Par suite : $\lim_{x\to 0} f\left(x\right)=0$

3) Etude : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\cos x}{\sqrt{x}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=+\infty$ car $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\sqrt{1+\sin x}-\cos x=\sqrt{2}$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\sqrt{x}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0^+$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\cos x}{\sqrt{x}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=-\infty$ car $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sqrt{1+\sin x}-\cos x=\sqrt{2}$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sqrt{x}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0^-$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)$ N'existe pas.

4) a) Montrons que : $\forall x\in\left]1+\frac{\pi}{2};+\infty\right[\ ;\ \left|f\left(x\right)\right|\le\frac{3}{\sqrt{x}}$

$$\forall x\in\left]1+\frac{\pi}{2};+\infty\right[\ ;\ \left|f\left(x\right)\right|=\left|\frac{\sqrt{1+\sin x}-\cos x}{\sqrt{x}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right|$$

On a : $\left|\sqrt{1+\sin x}-\cos x\right|\le\left|\sqrt{1+\sin x}\right|+\left|\cos x\right|$

C'est-à-dire : $\left|\sqrt{1+\sin x}-\cos x\right|\le\sqrt{1+\sin x}+\left|\cos x\right|$ et puisque : $\forall x\in\mathbb{R}\ -1\le\sin x\le 1$ et $-1\le\cos x\le 1$

Alors : $0\le 1+\sin x\le 2$ et donc : $0\le\sqrt{1+\sin x}\le\sqrt{2}$ et aussi on a : $\left|\cos x\right|\le 1$

ATMANI NAJIB

Alors on aura : $\left|\sqrt{1+\sin x}-\cos x\right| \leq \sqrt{2}+1 \prec 3$

On a aussi : $x \succ 1+\frac{\pi}{2}$ donc : $x-\frac{\pi}{2} \succ 1$ et donc : $0 \prec \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}} \prec 1$

Par suite : $\left|\sqrt{1+\sin x}-\cos x\right| \leq 3$ et $0 \prec \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}} \prec 1$

Donc : $\forall x \in \left]1+\frac{\pi}{2};+\infty\right[$; $|f(x)| = \left|\frac{\sqrt{1+\sin x}-\cos x}{\sqrt{x}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right| \leq \frac{3}{\sqrt{x}}$

b) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice12 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\sin x \times E\left(\frac{1}{x}\right)$

1) Déterminer : D_f

2) Etudier la limite de f en 0

3) Etudier la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \sin x \times E\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times x \times E\left(\frac{1}{x}\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

- Calculons : $\lim\limits_{x\to 0^+} x \times E\left(\frac{1}{x}\right)$????

Soit $x \in]0;+\infty[$; On sait que : $x-1 \prec E(x) \leq x \Rightarrow \frac{1}{x}-1 \prec E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \Rightarrow 1-x \prec xE\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$ alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} x \times E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

Par suite : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \times 1 = 1$

- Calculons : $\lim\limits_{x\to 0^+} x \times E\left(\frac{1}{x}\right)$????

Soit $x \in]-\infty;0[$; On sait que : $x-1 \prec E(x) \leq x \Rightarrow \frac{1}{x}-1 \prec E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \Rightarrow 1 \leq xE\left(\frac{1}{x}\right) \prec 1-x$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^-} 1-x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} 1 = 1$ alors : $\lim\limits_{x\to 0^-} x \times E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

ATMANI NAJIB

Par suite : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1\times 1 = 1$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ alors la fonction f admet une limite en 0

Et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

2) On doit faire une simplification de : $f(x)$

Soit $x \succ 1 \Rightarrow 0 \prec \frac{1}{x} \prec 1 \Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow f(x) = \sin x \times E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 0 = 0$

Soit $x \prec -1 \Rightarrow -1 \prec \frac{1}{x} \prec 0 \Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right) = -1 \Rightarrow f(x) = \sin x \times E\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin x$

Donc : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} -\sin x$ n'existe pas

Exercice13 : Considérons la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{E(x) + E(x+\frac{1}{n}) + \ldots + E(x+\frac{n-1}{n})}{nx}$$ Avec : $n \in \mathbb{N}^*$

1) Déterminer : D_f

2) Simplifier : $f_1(x)$

3) a) Montrer que : $E(x) + E(x+\frac{1}{2}) = E(2x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (poser : $E(x) = n$ et discuter)

b) En déduire une simplification de : $f_2(x)$

4) Montrer que : $f_n(x) = \frac{E(nx)}{nx}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$

5) a) Montrer que : $1 - \frac{1}{nx} \prec f_n(x) \le 1$; $\forall x \in \left]0;+\infty\right[$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x)$

6) Etudier la limite de f_n en 0

7) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 1^+} f_n(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f_n(x) = \frac{n-1}{n}$

Solution : 1) $D_{f_n} = \{x \in \mathbb{R} / nx \ne 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

2) Simplification de : $f_1(x)$

On a : $f_1(x) = \frac{E(x)}{x}$

3) a) Montrons que : $E(x) + E(x+\frac{1}{2}) = E(2x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$: On a : $E(x)\leq x\prec E(x)+1$ donc : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ 0\leq x-E(x)\prec 1$

On pose : $x-E(x)=r$ donc : $0\leq r\prec 1$

$x-E(x)=r\Leftrightarrow x=E(x)+r$

$E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)=E(2x)\Leftrightarrow E\left(E(x)+r\right)+E\left(E(x)+r+\frac{1}{2}\right)=E\left(2\left(E(x)+r\right)\right)$

$\Leftrightarrow E(x)+E(r)+E(x)+E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E\left(2E(x)+2r\right)\Leftrightarrow 2E(x)+0+E\left(r+\frac{1}{2}\right)=2E(x)+E(2r)$

Donc : $E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)=E(2x)\Leftrightarrow E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E(2r)$

Si je montre que : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E(2r)$ Avec : $0\leq r\prec 1$ alors c'est fini

Si : $0\leq r\prec\frac{1}{2}$ alors : $0\leq 2r\prec 1$ et $\frac{1}{2}\leq r+\frac{1}{2}\prec 1$donc : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=0$ et $E(2r)=0$

D'où : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E(2r)$

Si : $\frac{1}{2}\leq r\prec 1$ alors : $1\leq 2r\prec 2$ et $\frac{3}{2}\leq r+\frac{1}{2}\prec 2$donc : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=1$ et $E(2r)=1$

D'où : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E(2r)$

Par suite : $E\left(r+\frac{1}{2}\right)=E(2r)$ Avec : $0\leq r\prec 1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)=E(2x)$

b) Déduction d'une simplification de : $f_2(x)$

$$f_2(x)=\frac{E(x)+E(x+\frac{1}{2})}{2x}=\frac{E(2x)}{2x}$$

4) Montrons que : $f_n(x)=\frac{E(nx)}{nx}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\forall x\in\mathbb{R}^*$

C'est-à-dire Montrons que : $\frac{E(x)+E(x+\frac{1}{n})+...+E(x+\frac{n-1}{n})}{nx}=\frac{E(nx)}{nx}$

C'est-à-dire Montrons que : $E(x)+E(x+\frac{1}{n})+...+E(x+\frac{n-1}{n})=E(nx)$???

On pose : $E(x)=m\in\mathbb{Z}$ et donc : $m\leq x\prec m+1$

Donc : $m+\frac{k}{n}\leq x+\frac{k}{n}\prec m+1+\frac{k}{n}$; $\forall k\in\{0;1;....;n-1\}$

Donc : $m\leq m+\frac{k}{n}\leq x+\frac{k}{n}\prec m+1+\frac{k}{n}\prec m+2$ (on ne peut pas déterminer : $E(x+\frac{k}{n})$

On a : $x+\frac{k_0}{n} \prec m+1 \leq x+\frac{k_0+1}{n}$ par suite : $\forall k \in \{0;1;....;k_0\}$ on a : $m \leq m+\frac{k}{n} \leq x+\frac{k_0}{n} \prec m+1$

Donc : $E(x+\frac{k}{n}) = m \ \forall k \in \{0;1;....;k_0\}$ ①

Et $\forall k \in \{k_0+1;....;n-1\}$; $m+1 \leq x+\frac{k_0+1}{n} \prec x+\frac{k}{n} \prec m+2$

Donc : $E(x+\frac{k}{n}) = m+1$; $\forall k \in \{k_0+1;....;n-1\}$ ②

De : ① et ② en déduit que : $E(x)+E(x+\frac{1}{n})+...+E(x+\frac{n-1}{n}) = m(k_0+1)+(m+1)(n-k_0-1)$

(Car : de p à q il Ya : q-p+1 éléments)

Donc : $E(x)+E(x+\frac{1}{n})+...+E(x+\frac{n-1}{n}) = mn+n-k_0-1$

Et puisque : $x+\frac{k_0}{n} \prec m+1 \leq x+\frac{k_0+1}{n}$ alors : $m+1-\frac{k_0+1}{n} \leq x \prec m+1-\frac{k_0}{n}$

Donc : $mn+n-k_0-1 \leq mn \prec mn+n-k_0$

Donc : $E(nx) = E(x)+E(x+\frac{1}{n})+...+E(x+\frac{n-1}{n})$

5) a) Montrons que : $1-\frac{1}{nx} \prec f_n(x) \leq 1$; $\forall x \in]0;+\infty[$

On sait que : $x-1 \prec E(x) \leq x \Rightarrow nx-1 \prec E(nx) \leq nx \Rightarrow \frac{nx-1}{nx} \prec \frac{E(nx)}{nx} \leq \frac{nx}{nx} \Rightarrow 1-\frac{1}{nx} \prec f_n(x) \leq 1$

b) Déduction de : $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$

Puisque : $1-\frac{1}{nx} \prec f_n(x) \leq 1$ et $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{nx} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} 1 = 1$ donc : $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$

6) Etude de la limite de f_n en 0 :

a) Etude de la limite de f_n à droite en 0 :

$\forall x \in \left]0;\frac{1}{n}\right[$ on a : $0 \prec x \prec \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \prec nx \prec 1 \Rightarrow E(nx) = 0$

Donc : $f_n(x) = \frac{E(nx)}{nx} = \frac{0}{nx} = 0$

Donc : $\lim_{x\to0^+} f_n(x) = \lim_{x\to0^+} 0 = 0$

a) Etude de la limite de f_n à gauche en 0 :

$\forall x \in \left]-\frac{1}{n};0\right[$ on a : $-\frac{1}{n} \prec x \prec 0 \Rightarrow -1 \prec nx \prec 0 \Rightarrow E(nx) = -1$

Donc : $f_n(x) = \frac{E(nx)}{nx} = \frac{-1}{nx}$

Donc : $\lim_{x\to0^-} f_n(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{-1}{nx} = +\infty$

PROF: ATMANI NAJIB

Par suite : f_n n'a pas de limite en 0 :

7) a) Montrons que : $\lim\limits_{x\to 1^+} f_n(x) = 1$

$\forall x \in \left]1;1+\frac{1}{n}\right[$ On a : $1 \prec x \prec 1+\frac{1}{n} \Rightarrow n \prec nx \prec n+1 \Rightarrow E(nx) = n$

Donc : $f_n(x) = \frac{E(nx)}{nx} = \frac{n}{nx} = \frac{1}{x}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$

b) Montrons que : $\lim\limits_{x\to 1^-} f_n(x) = \frac{n-1}{n}$

$\forall x \in \left]1-\frac{1}{n};1\right[$ On a : $1-\frac{1}{n} \prec x \prec 1 \Rightarrow n-1 \prec nx \prec n \Rightarrow E(nx) = n-1$

Donc : $f_n(x) = \frac{E(nx)}{nx} = \frac{n-1}{nx}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^-} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{n-1}{nx} = \frac{n-1}{n}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien