1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Série N°1 : *LA ROTATION DANS LE PLAN*

Exercice1 : Soit ABC un triangle rectangle isocèle direct en A et soit I milieu de [BC].

1) a) Construire D l'image de C par la rotation directe de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b) Construire E l'image de B par la rotation indirecte de centre C et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

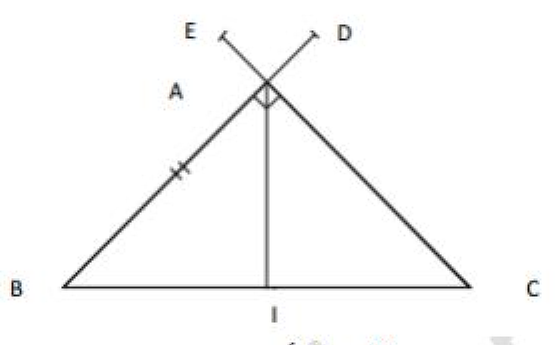
2) Quelle est l'image de A par le quart de tour direct de centre I ?

Solution :1) a) $r\left(B;\frac{\pi}{4}\right)$:On a : $r(C)=D$ donc : $\begin{cases} BC=BD \\ \left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

D'où la construction du point D

b) $r\left(C;-\frac{\pi}{4}\right)$: On a : $r(B)=E$ donc : $\begin{cases} CB=CE \\ \left(\overline{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

D'où la construction du point E



2) $r\left(I;\frac{\pi}{2}\right)$: **On a** : $\begin{cases} IA=IB \\ \left(\overline{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ainsi : $r(A)=B$

Exercice2 : ABC un triangle rectangle direct et isocèle en A tel que AB=AC=3

Soit r est la rotation de centre A et d'angle : $\frac{\pi}{2}$

1) Determiner $r(B)$ et $r((AB))$

2) Construire $K=r(C)$ puis montrer que les points A,B et K sont alignés.

3) Montrer que A est le milieu de [KB]

4) Déterminer la nature du triangle BCK. Justifier.

Solution :

1)On a : $\begin{cases} AB=AC \\ \left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ainsi : $r(B)=C$

On a : $r(B)=C$ **et** $r(A)=A$ **Alors :** $r((AB))=(AC)$

2) On a : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AK}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ Car : $r(C)=K$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AK}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AK}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}[2\pi]\equiv\pi[2\pi]$

Par suite : les points A,B et K sont alignés

3) Montrons que A est le milieu de [KB]

On a : $\begin{cases} AB=AC \\ AK=AC \end{cases}$ **Alors :** $AB=AK$

Donc : A est le milieu de [KB]

4) Déterminons la nature du triangle BCK

Comme : A est le milieu de [KB] **Alors :** $AB=AC=AK$ donc : le triangle BKC est rectangle en C

On a : $\begin{cases} r(B)=C \\ r(C)=K \end{cases}$ **Alors :** $BC=CK$

Le triangle BKC est isocèle en C

Conclusion : BKC est un triangle rectangle et isocèle en C

Exercice3 : ABC est un triangle équilatéral direct. I le symétrique de B par rapport à (AC)

r la rotation direct de centre I et d'angle : $\frac{\pi}{3}$

1) Montrer que ABCI est un losange

2) Montrer alors que AIC est un triangle équilatérale et que : $r(A)=C$

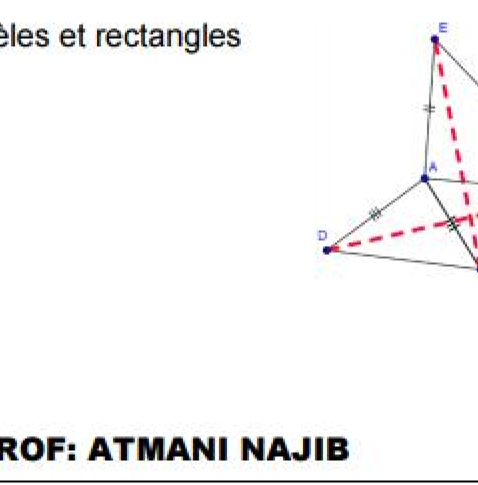
3) Soit $r(B)=D$; Montrer que $CI=CA=CD$

Solution :1) $BA=BC$ et comme I le symétrique de B par rapport à (AC) donc $IA=IC$

Donc : [BI] médiatrice de [AC]

[BI] et [CA] sont deux diagonales se coupent en milieu et perpendiculaires donc ABCI est un losange

2) $\begin{cases} IA=IC \\ \left(\overline{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ donc AIC un triangle équilatéral :



On a : $\begin{cases} IA=IC \\ \left(\overline{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ alors : $r(A)=C$

3)On a : $\begin{cases} r(A)=C \\ r(B)=D \end{cases}$ **Alors :** $AB=CD$ et Comme $AB=AC$

Alors : $AC=CD$ (1)

AIC un triangle équilatéral : $IA=IC=AC$ (2)

(1) et (2) donne : $AC=IC=CD$

Exercice4 : ABC est un triangle.

On construit à l'extérieur deux triangles ABD et ACE isocèles et rectangles en A

1) Montrer que : $BE=CD$

2) Montrer que : $(BE)\perp(CD)$

Solution : Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a : $\begin{cases} AD=AB \\ \left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(D)=B$ ❶

On a : $\begin{cases} AC=AE \\ \left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc :❷ $r(C)=E$

Et puisque la rotation conserve les distances

Alors de❶ et ❷ en déduit que $BE=CD$

2)on a $r(D)=B$ et $r(C)=E$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{EB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ par suite : $(BE)\perp(CD)$

Exercice5 : ABC est un triangle tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ positif.

On construit à l'extérieur les carrés $ABDE$ et $ACFG$

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Déterminer : $r(E)$ et $r(C)$

2) Montrer que : $\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}}\right)[2\pi]$

Solution : On a : $\begin{cases} AE=AB \\ \left(\overline{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(E)=B$ ❶

Et on a : $\begin{cases} AC=AG \\ \left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : ❷ $r(C)=G$

Et on a : $r(A)=A$ ❸ car A le centre de la rotation conserve les mesures des angles orientés

De : ❶ ; ❷ et ❸ en déduit que : $\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}}\right)[2\pi]$

Exercice6 : ABC est un triangle tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ positif.

On considère les points E et D à l'extérieur du triangle ABC tels que : ACE et ABD sont deux triangles équilatéraux

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) Construire une figure

2) Déterminer : $r(C)$ et $r(D)$

3) Montrer que : $CD=BE$

4) On considère le point I le milieu du segment $[CD]$

Déterminer (Γ') l'image du cercle (Γ) de centre C et de rayon CI par la rotation r

5) Soit la droite (Δ') l'image de la droite (AI) par la rotation r

a) Construire la droite (Δ')

b) Montrer que : la droite (Δ') coupe nécessairement le cercle (Γ') ; justifier

Solution :1) Voir figure

2) Déterminons : $r(C)$ et $r(D)$

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

→On a : ACE est un triangle équilatéral direct donc : $\begin{cases} AC=AE \\ \left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(C)=E$

→On a : ADB est un triangle équilatéral direct donc : $\begin{cases} AD=AB \\ \left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(D)=B$

2) Montrons que : $CD=BE$

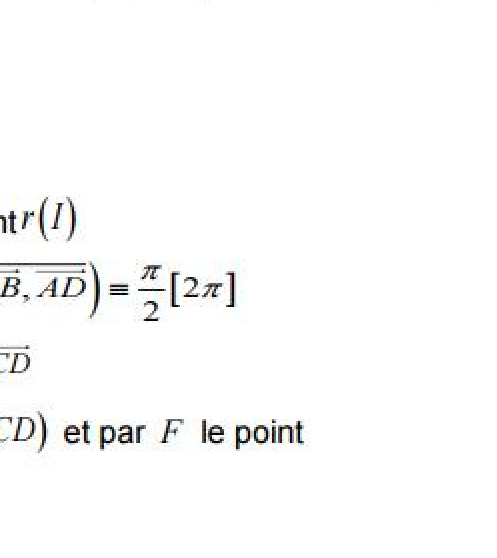
On a : $r(C)=E$ et $r(D)=B$ et comme la rotation conserve les distances

Alors : $CD=BE$

4) Déterminons (Γ') l'image du cercle (Γ) de centre C et de rayon CI par la rotation r

On a : I le milieu du segment $[CD]$ et (Γ) est le cercle de centre C et de rayon CI et $r(C)=E$

Alors : (Γ') est le cercle de centre E et de rayon CI



5) Soit la droite (Δ') l'image de la droite (AI) par la rotation r

a) Construire la droite (Δ') : I est le milieu du segment $[CD]$ et $r(C)=E$ et $r(D)=B$

Donc : $r(I)$ est le milieu du segment $[EB]$ et comme : $r(A)=A$

Alors : (Δ') passe par A et le milieu du segment $[EB]$

Voir figure

b) Montrons que : la droite (Δ') coupe nécessairement le cercle (Γ')

On a : I le milieu du segment $[CD]$ et c'est le point d'intersection de (CD) et (Γ)

Et comme : $r(C)=E$ et $r(D)=B$ et $r((\Gamma))=(\Gamma')$

$r(I)$ c'est le point d'intersection de (EB) et (Γ')

Donc : la droite (Δ') coupe nécessairement le cercle (Γ') au point $r(I)$

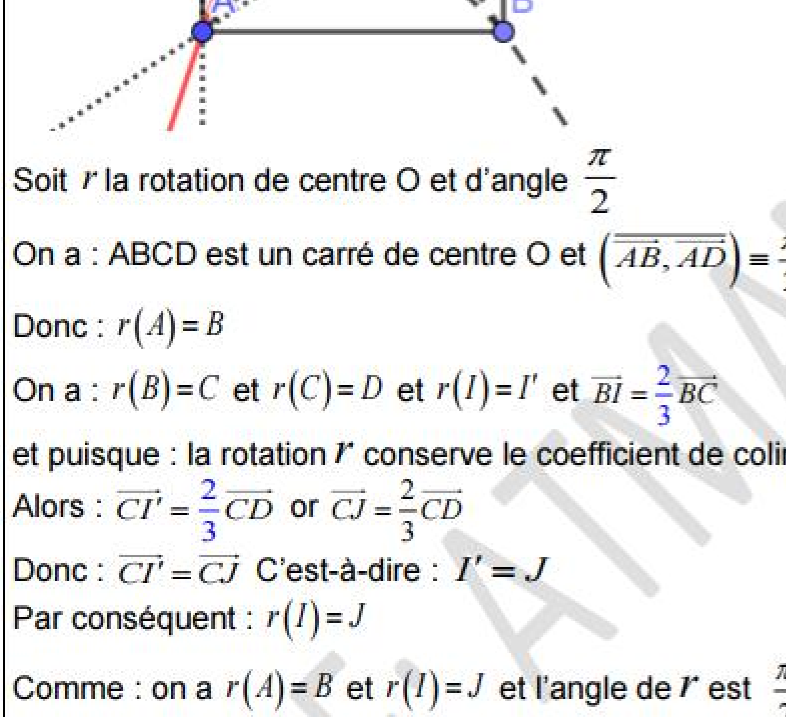
Exercice7 : On considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

et soient I et J deux points du plan tel que : $\overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

On désigne par E est le point d'intersection des droites (AI) et (CD) et par F le point d'intersection des droites (AD) et (BJ)

Montrer que : $(AJ)\perp(EF)$

Solution : Montrons que : $(AJ)\perp(EF)$



Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a : ABCD est un carré de centre O et $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : $r(A)=B$

On a : $r(B)=C$ et $r(C)=D$ et $r(I)=I'$ et $\overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

et puisque : la rotation r conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors : $\overrightarrow{CI'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ or $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

Donc : $\overrightarrow{CI'}=\overrightarrow{CJ}$ C'est-à-dire : $I'=J$

Par conséquent : $r(I)=J$

Comme : on a $r(A)=B$ et $r(I)=J$ et l'angle de r est $\frac{\pi}{2}$ Alors : $\left(\overline{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{BJ}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où : $(AI)\perp(BJ)$ et puisque $(AI)=(AE)$ car $I\in(AE)$ et $(BJ)=(FJ)$ car $F\in(BJ)$

Alors : $(AE)\perp(FJ)$

Donc : (FJ) est une hauteur du triangle AEF issue de F

D'autre part :on a : $(EJ)\perp(AF)$

Donc : (EJ) est une hauteur du triangle AEF issue de E et comme on a :

$(EJ)\perp(FJ)=\{J\}$

Alors : J est une l'intersection des hauteurs du triangle AEF

Donc : la hauteur du triangle AEF issue de A passe par J

D'où : $(AJ)\perp(EF)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien