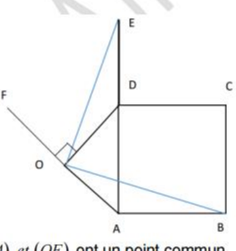
1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°2 : *LA ROTATION DANS LE*

Exercice1 : Soit ABCD un carrée direct.
On trace à l'extérieur de ce carré le triangle OAD rectangle et isocèle en O. Soit r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Montrer que : $r(A)=D$
2) a) Construire le point E image de B par r
b) Montrer que (DC) est perpendiculaire a (DE)
3) Soit $F=r(D)$; Montrer que O, A et F sont alignés.



Solution :1) On a : $\begin{cases} OA=OD \\ \left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ainsi : $r(A)=D$

2)a) Voir figure

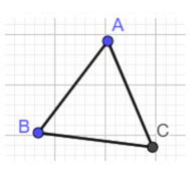
b) On a : $\begin{cases} r(A)=D \\ r(B)=E \end{cases}$ **Alors :** $(AB)\perp(DE)$ et Comme $(AB)\parallel(DC)$ (ABCD est un carrée)

Alors : $(DC)\perp(DE)$

3) $(OA)\perp(OD)$ et $(OD)\perp(OF)$ **Alors :** $(OA)\parallel(OF)$ et comme (OA) *et* (OF) ont un point commun

Donc : O, A et F sont alignés

Exercice2 : ABC est un triangle équilatéral tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ positif.



Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) Déterminer $r_A(A)$; $r_A(B)$
2) Soit r^{-1} la rotation réciproque de r_A
Déterminer : l'image du point C par la rotation r^{-1}

Solution : $r_A\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$ 1) Déterminons $r_A(A)$; $r_A(B)$

- $r_A(A)=A$ Car A est le centre est le seul point invariant.
- ABC est un triangle équilatéral donc : $\begin{cases} AB=AC \\ \left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ ainsi : $r_A(B)=C$

2) Déterminons : l'image du point C par la rotation r^{-1}

On a : r^{-1} est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

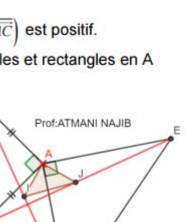
On a : $\begin{cases} AC=AB \\ \left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ ainsi : $r^{-1}(C)=B$

Remarque : $r(B)=C\Leftrightarrow r^{-1}(C)=B$

Exercice3 : Soit OAB un triangle direct isocèle de sommet principal O avec : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Soit r est la rotation de centre O et d'angle
1)a) Déterminer $r(A)$ b) Construire C tel que $r(B)=C$
Montrer que ABC est un triangle équilatéral.
2) [BO) coupe [AC] en I et [CO) coupe [AB} en J.
Montrer que $r(I)=J$.

Solution :1) a) OAB un triangle directe isocèle en A avec : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$



Donc : on a $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\pi-2\frac{\pi}{6}[2\pi]\equiv\pi-\frac{\pi}{3}[2\pi]\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Alors : $r(A)=B$

b) On a : $\begin{cases} r(A)=B \\ r(B)=C \end{cases}$ **Alors :** $r([AB])=[BC]$ donc : $AB=BC$ (1)

$\left(\overline{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}[2\pi]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ (2)

(1) et (2) donne : ABC est un triangle équilatéral

2) ABC est un triangle équilatéral de centre O

Donc : $\begin{cases} OC=OA \\ \left(\overline{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ Alors : $r(C)=A$

I Le milieu du segment $[BC]$ avec : $r(B)=C$ et $r(C)=A$

Donc : $r(I)$ Le milieu du segment $[CA]$

Alors : $r(I)=J$

Exercice4 : ABC est un triangle tel que la mesure principale de l'angle : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ est positif.

On construit à l'extérieur de ce triangle deux triangles ABD et ACE isocèles et rectangles en A $\left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$

On considère le point I le milieu du segment $[CD]$ et J le milieu du segment $[BE]$
1) Montrer que : $BE=CD$ et $(BE)\perp(CD)$
2) Montrer que : le triangle AIJ est isocèle et rectangle en A

Solution : 1) Montrons que : $BE=CD$ et $(BE)\perp(CD)$

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a : $\begin{cases} AD=AB \\ \left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : ❶ $r(D)=B$

On a : $\begin{cases} AC=AE \\ \left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : ❷ $r(C)=E$

Et puisque la rotation conserve les distances
Alors de❶ et ❷ en déduit que $BE=CD$

Comme on a : $r(D)=B$ et $r(C)=E$ et $\frac{\pi}{2}$ est l'angle de la rotation

Alors : $\left(\overline{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{EB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ par suite : $(BE)\perp(CD)$

2) Montrons que : le triangle AIJ est isocèle et rectangle en A
On a : $r(D)=B$ et $r(C)=E$ donc : $r([DC])=[r(D)r(C)]=[BE]$ car l'image d'un segment par une rotation est un segment

Puisque : le point I le milieu du segment $[CD]$ alors le point $r(I)$ le milieu du segment $[BE]$
Alors : $r(I)=J$

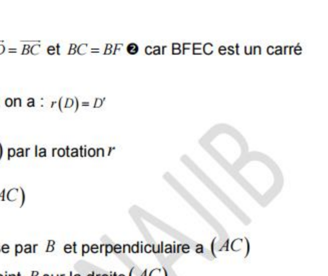
Alors : $\begin{cases} AI=AJ \\ \left(\overline{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ Par suite : le triangle AIJ est isocèle et rectangle en A

Exercice5 : IAB est un triangle isocèle et rectangle en I tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right)$ positif.

On trace à l'extérieur du triangle ABC un parallélogramme ABCD puis à l'extérieur du parallélogramme ABCD un carré BFEC

Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Construire une figure
2) a) Montrer que : $\left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BF}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$
b) Soit le point D' l'image du point D par la rotation r
Montrer que : $D'=F$ et $BD'=BF$
3) Montrer que : $CD=BE$
4) On considère le point H le projeté orthogonale du point B sur la droite (AC)
Et le point H' est le projeté orthogonale du point F sur la droite (CD)
a) Déterminer les images des droites (AC) et (CD) par la rotation r
b) Déterminer C' l'image du point C par la rotation r et construire C'



Solution :1) Voir figure
2) a) Montrons que : $\left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BF}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$
On a : BFEC est un carré direct donc : $\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$
On a aussi : ABCD un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

Par suite : $\left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BF}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) Soit le point D' l'image du point D par la rotation r
Montrons que : $D'=F$ et $BD'=BF$
On a : $\left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BF}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ❶ et comme : $AD=BC$ car $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et $BC=BF$ ❷ car BFEC est un carré
Alors : $AD=BF$
De : ❶ et ❷ en déduit que : $r(D)=F$ car : $r(A)=B$ et on a : $r(D)=D'$
Donc : $D'=F$ et $BD'=BF$

4)a) Déterminons les images des droites (AC) et (CD) par la rotation r

→ On a : $\begin{cases} IA=IB \\ \left(\overline{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$ et $H\in(AC)$

Donc : l'image de la droite (AC) par la rotation r passe par B et perpendiculaire a (AC)
Et comme : le point H est le projeté orthogonale du point B sur la droite (AC)
Alors : l'image de la droite (AC) par la rotation r est la droite (BH)
→ On a : $r(D)=F$
Donc : l'image de la droite (CD) par la rotation r passe par F et perpendiculaire a (CD)
Et comme : le point H' est le projeté orthogonale du point F sur la droite (CD)
Alors : l'image de la droite (CD) par la rotation r est la droite (FH')
b) Déterminons C' l'image du point C par la rotation r et construire C'
On a : C est le point d'intersection des droites (AC) et (CD)
Or $r((AC))=(BH)$ et $r((CD))=(FH')$ donc C' l'image du point C est le point d'intersection des droites (BH) et (FH')
D'où la construction du point C'

Exercice6 : ABC est un triangle isocèle et rectangle tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

E et F deux points tel que le triangle AEF est isocèle et rectangle en A
Comme l'indique la figure ci-contre.

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Montrer que : $r(B)=C$ et $r(E)=F$
2) Montrer que : $CF=BE$
3) Soient I est le milieu du segment $[BE]$ et J est le milieu du segment $[CF]$
Montrer que : $\left(\overline{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AI=AJ$
4) Soient (D) la droite passant par F et perpendiculaire a (CF)
Montrer que : les droites (D) et (BE) sont parallèles
5) Déterminer l'image de la droite (D) par la rotation r^{-1} la réciproque de la rotation r

Solution : Montrons que : $r(B)=C$ et $r(E)=F$
→ On a : ABC est un triangle isocèle et rectangle en A

Donc : $\begin{cases} AB=AC \\ \left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$

Donc : $r(B)=C$
→ On a : AEF est un triangle isocèle et rectangle en A

Donc : $\begin{cases} AE=AF \\ \left(\overline{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(E)=F$

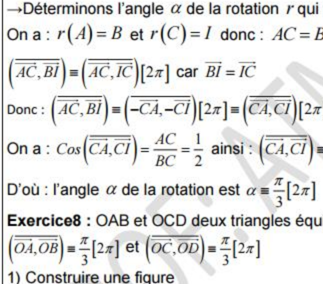
2) Montrons que : $CF=BE$
On a : $r(B)=C$ et $r(E)=F$ et comme la rotation conserve les distances
Alors : $CF=BE$
3) Montrons que : $\left(\overline{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AI=AJ$
→ On a : $r(B)=C$ et $r(E)=F$ et I le milieu du segment $[BE]$
Alors : $r(I)$ est le milieu du segment $[CF]$ car la rotation conserve les milieux
Et puisque : J est le milieu du segment $[CF]$
Alors : $r(I)=J$

Par suite : $\begin{cases} AI=AJ \\ \left(\overline{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

4) Montrons que : les droites (D) et (BE) sont parallèles
→ On a : $r(B)=C$ et $r(E)=F$ d'où : $\left(\overline{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$
C'est-à-dire : les droites (CF) et (BE) sont perpendiculaires et comme (D) est perpendiculaire a (CF) Alors : (D) et (BE) sont parallèles
5) Déterminons l'image de la droite (D) par la rotation r^{-1}
On a : $r(E)=F$ donc : $r^{-1}(F)=E$ et comme (D) est la droite passant par F et perpendiculaire a (CF) alors : l'image de la droite (D) par la rotation r^{-1} est la droite passant par E et perpendiculaire a (CF)

Exercice7 : ABC est un triangle rectangle tels que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$; $BC=2AC$ et le point I est le milieu du segment $[BC]$

Déterminer les éléments caractéristiques de la rotation r qui transforme A en B et C en I
Solution : Voir figure



→Déterminons le centre Ω de la rotation r qui transforme A en B et C en I

On a : $r(A)=B$ donc : $\begin{cases} \Omega A=\Omega B \\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}}\right)\equiv\alpha[2\pi] \end{cases}$ et $r(C)=I$ donc : $\begin{cases} \Omega C=\Omega I \\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega I}}\right)\equiv\alpha[2\pi] \end{cases}$

D'où : le centre Ω de la rotation r est le point d'intersection des médiatrices des segments : $[AB]$ et $[CI]$

→Déterminons l'angle α de la rotation r qui transforme A en B et C en I

On a : $r(A)=B$ et $r(C)=I$ donc : $AC=BI$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BI}}\right)\equiv\alpha[2\pi]$

$\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BI}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{IC}}\right)[2\pi]$ car $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IC}$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BI}}\right)\equiv\left(\overline{-\overrightarrow{CA},-\overrightarrow{CI}}\right)[2\pi]\equiv\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI}}\right)[2\pi]$

On a : $Cos\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI}}\right)=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{2}$ ainsi : $\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

D'où : l'angle α de la rotation est $\alpha\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Exercice8 : OAB et OCD deux triangles équilatéraux tels que tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left(\overline{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

1) Construire une figure
2) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$
a) Montrer que : $AC=BD$
b) Montrer que : $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Solution : 1) Construction d'une figure
2) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$
a) Montrons que : $AC=BD$

On a : $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$ ❶ et on a : $\begin{cases} OC=OD \\ \left(\overline{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(C)=D$ ❷

De : ❶ et ❷ en déduit que : $AC=BD$ Car la rotation conserve les distances

b) Montrons que : $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

On a : $r(A)=B$ et $r(C)=D$ et r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$

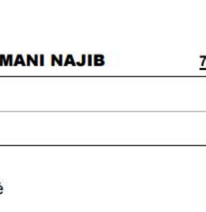
Alors : $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Exercice9 : ABC est un triangle isocèle et rectangle de sommet A tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ Soient I est le milieu du segment $[BC]$

Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Faire une figue
2) a) Déterminer : $r(A)$ et $r(C)$
b) Déterminer : $r((BC))$
3) Soit : E et F deux points du plan tel que : $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$
Montrer que : EFI est un triangle isocèle et rectangle

Solution :1) Voir figue
2) a) Déterminons : $r(A)$ et $r(C)$



Prof:ATMANI NAJIB

Puisque ABC est un triangle rectangle de sommet A et I est le milieu du segment $[BC]$
Alors : $IA=IB=IC$
Puisque ABC est un triangle isocèle de sommet A et I est le milieu du segment $[BC]$
Alors : (IA) est la médiatrice du segment $[BC]$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\overline{\overrightarrow{ICA},\overrightarrow{IA}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où : $\begin{cases} IA=IB \\ \left(\overline{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} IC=IA \\ \left(\overline{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Par suite : $r(A)=B$ et $r(C)=A$
b) Déterminons : $r((BC))$
On a : $r(I)=I$ et $r(C)=A$ donc : $r((CI))=(AI)$ et puisque : car $I\in(BC)$
Alors : $r((BC))=(AI)$
3)Montrons que : EFI est un triangle isocèle et rectangle
Posons : $r(E)=E'$
On a : $r(A)=B$ et $r(C)=A$ et $r(E)=E'$ et $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Alors : $\overrightarrow{BE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité
On a : $\overrightarrow{BE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ donc : $\overrightarrow{BE'}=\overrightarrow{BF}$
Donc : $E'=F$
Par conséquent : $r(E)=F$

Par suite : $\begin{cases} IE=IF \\ \left(\overline{\overrightarrow{IE},\overrightarrow{IF}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : EFI est un triangle isocèle et rectangle

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien