1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

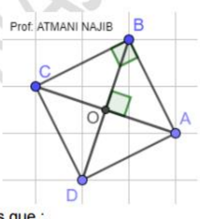
Correction : série N°3 : *LA ROTATION DANS LE PLAN*

Exercice1 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ positif. Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O une rotation de centre O et d'angle α .

1) Déterminer $r_A(A)$; $r_A(B)$; $r_A(D)$,

2) Comment choisir α pour avoir $r_O(A)=B$? Comment choisir α pour avoir $r_O(A)=C$?

Solution : $r_A\left(A;\frac{\pi}{2}\right)$ et $r_O(O;\alpha)$



- $r_A(A)=A$ Car le centre est le seul point invariant.
- $r_A(B)=D$ Car $\begin{cases} AB=AD \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$
- $r_A(D)=B'$ avec B' le symétrique de B par rapport a A

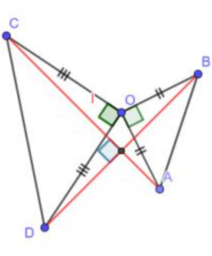
2) $\rightarrow r_O(A)=B \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ $r_O(A)=C \Leftrightarrow \alpha=\pi$

Exercice2 : OAB et OCD deux triangles rectangles et isocèles en O tels que : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Montrer que : $AC=BD$ et que $(AC)\perp(BD)$

Solution : OAB et OCD deux triangles rectangles et isocèles de sommet commun O

Ceci nous conduit à considérer la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$



$\rightarrow$On a : $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$ ❶

$\rightarrow$On a : $\begin{cases} OC=OD \\ \left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(C)=D$ ❷

Et puisque la rotation conserve les distances
Alors de❶ et ❷ en déduit que $AC=BD$

Comme on a : $r(A)=B$ et $r(C)=D$ et $\frac{\pi}{2}$ est l'angle de cette rotation

Alors : $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ par suite : $(AC)\perp(BD)$

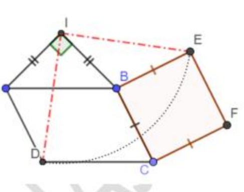
Exercice3 : Soit $ABCD$ un parallélogramme

On trace à l'extérieur de ce parallélogramme : Le carré $BEFC$ et le triangle isocèle et rectangle IAB en I tel que : $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Construire une figure

2) Montrer que : $r(D)=F$



Solution :1) Voir figure

2) Montrons que : $r(D)=F$

$\rightarrow$ On a : $\begin{cases} IA=IB \\ \left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$ où : r est la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Soit le point D' l'image du point D par la rotation r

Montrons que : $D'=E$

$\rightarrow$ On a : $\begin{cases} r(D)=D' \\ r(A)=B \end{cases}$ Donc : $AD=BD'$ ❶ car la rotation conserve la distance

Et $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BD'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ❷ car r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a aussi : ABCD un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ par suite : $AD=BC$

Donc : ❷ devient : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et ❶ devient : $BD'=BC$

On a aussi : $BEFC$ un carré donc : $\begin{cases} BC=BE \\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

On a : $BE=BC$ et $BD'=BC$ donc : $\boxed{BE=BD'}$ (3)

On a aussi : $\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD'}\right)[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}[2\pi]\equiv0[2\pi]$

Donc : $\boxed{\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD'}\right)\equiv0[2\pi]}$ (4)

De : (3) et (4) en déduit que : $r(D)=E$

Exercice4 : ABC est un triangle isocèle et rectangle de sommet C tel que : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ Soient I est le milieu du segment $[AB]$ et E un point tel que : C est le milieu du segment $[BE]$

Soit r la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

1) Faire une figue

2)Montrer que : $r(A)=C$ et $r(C)=B$

3) Soit F l'image du point E par la rotation r

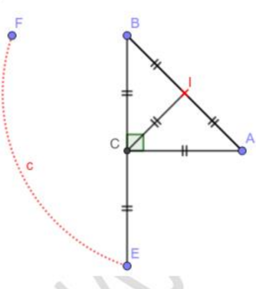
Montrer que : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

4) Déterminer la nature du quadrilatère $ACFB$

Solution :2) Voir figue

1)Montrons que : $r(A)=C$ et $r(C)=B$

Soit r la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$



Puisque : ABC est un triangle isocèle et rectangle de sommet C et I est le milieu du segment $[AB]$

Alors : IAC et IBC sont deux triangles isocèles et rectangles de sommet I

Donc : $\begin{cases} IA=IC \\ \left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} IC=IB \\ \left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IB}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(A)=C$ et $r(C)=B$

3)Montrons que : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

On a : $r(C)=B$; $r(E)=F$ et $-\frac{\pi}{2}$ est l'angle de la rotation

Alors : $\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{BF}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et puisque : C est le milieu du segment $[BE]$

$\rightarrow$ On a : ABC est un triangle isocèle et rectangle en A

Alors : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CE}$

Donc : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

4) Déterminons la nature du quadrilatère $ACFB$

Puisque : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors : $(BC)\perp(BF)$ ❶

Puisque : BCA est un triangle rectangle en C

Alors : $(BC)\perp(CA)$ ❷

De : ❶ et ❷ en déduit que : $(BF)\parallel(CA)$ (a)

Puisque : $r(E)=F$ et $r(C)=B$ alors : $EC=FB$ car la rotation conserve les distances

Et comme : $CE=CA$ Alors : $BF=CA$ (b)

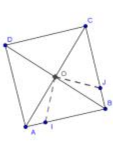
De : (a) et (b) en déduit que : ACFB est un parallélogramme

Exercice5 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ positif.

I et J deux points tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Montrer que $(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ$

Solution :il suffit de montrer que : $r(I)=J$????



On pose : $r(I)=I'$

On a : $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $r(A)=B$

On a : $\begin{cases} OB=OC \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $r(B)=C$

Et on a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{BI'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❶ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs et comme on sait que : $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❷

De ❶ et ❷ en déduit que $\overrightarrow{BI'}=\overrightarrow{BJ}$ donc $I'=J$

Donc : $r(I)=J$ par suite : $\begin{cases} OI=OJ \\ \left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Exercice6 : ABCD est un carré de centre O et de coté 2cm ci contre tel que : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ positif. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Déterminer : O' ; A'; B'; C' et D' les images respectives des points : O ; A; B; C et D par la rotation r

2)a) Calculer la distance : $A'B'$

b) Déterminer : une mesure de l'angle : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$

c) Déterminer : une mesure de l'angle : $\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}\right)$

Solution :1) Déterminer les points : O' ; A'; B'; C' et D'

$\rightarrow$On a : $r(O)=O$ Car O est le centre donc point invariant par suite: $O'=O$

$\rightarrow$On a : $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ainsi : $r(A)=B$ par suite: $A'=B$

$\rightarrow$On a : $\begin{cases} OB=OC \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ainsi : $r(B)=C$ par suite: $B'=C$

$\rightarrow$On a : $\begin{cases} OC=OD \\ \left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ainsi : $r(C)=D$ par suite: $C'=D$

$\rightarrow$On a : $\begin{cases} OD=OA \\ \left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ainsi : $r(D)=A$ par suite: $D'=A$

2)a) Calculons la distance : $A'B'$

On a : $r(A)=A'$ et $r(B)=B'$

Donc : $A'B'=AB=2cm$ car la rotation conserve la distance

b) Déterminons : une mesure de l'angle : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$

On a : $r\left(O;\frac{\pi}{2}\right)$ et comme : $r(A)=A'$ et $r(B)=B'$ alors : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Et comme : $A'=B$ et $B'=C$ alors : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

c) Déterminons : une mesure de l'angle : $\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}\right)$

On a : $r(A)=A'$ et $r(B)=B'$; $r(C)=C'$ et $r(D)=D'$

Et puisque la rotation conserve les mesures des angles orientés alors :

$\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]$ Or: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)\equiv\pi[2\pi]$ donc: $\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}\right)\equiv\pi[2\pi]$

Donc : π est une mesure de l'angle : $\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}\right)$

Exercice7 : On considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soient I et J deux points du plan tel que :

I est le barycentre des points pondérés $(A;3)$; $(B;1)$

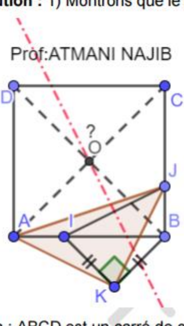
J est le barycentre des points pondérés $(B;3)$; $(C;1)$

On considère le point K tel que KBI soit un triangle isocèle et $\left(\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KI}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

1) Montrer que le point O appartient à la médiatrice du segment $[IJ]$

2) Montrer que le triangle AKJ est isocèle et rectangle

Solution : 1) Montrons que le point O appartient à la médiatrice du segment $[IJ]$



On a : ABCD est un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Ceci nous conduit à choisir : la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On a : $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$

Et comme : $\begin{cases} OB=OC \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ alors : $r(B)=C$

Et puisque : I est le barycentre des points pondérés $(A;3)$; $(B;1)$ et la rotation conserve le barycentre alors : $r(I)$ est le barycentre des points pondérés $(r(A);3)$; $(r(B);1)$

C'est-à-dire : $r(I)$ est le barycentre des points pondérés $(B;3)$; $(C;1)$

Par suite : $r(I)=J$

Donc : $\begin{cases} OI=OJ \\ \left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Par suite : le point O appartient à la médiatrice du segment $[IJ]$

2) Montrons que le triangle AKJ est isocèle et rectangle

Considérons : la rotation r' de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On a : $\begin{cases} KB=KI \\ \left(\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KI}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r'(B)=I$

Posons : $r'(J)=J'$

Puisque :la rotation conserve les distances et l'angle de la rotation r' est $\frac{\pi}{2}$.

Alors : $\begin{cases} BJ=IJ' \\ \left(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{IJ'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ et puisque : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $AB=BC$ (car I est le barycentre des points pondérés $(A;3)$; $(B;1)$ et J est le barycentre des points pondérés $(B;3)$; $(C;1)$)

Alors : $AI=BJ$ et donc : $IJ=AJ$ et puisque : $(BJ)\perp(IA)$

Alors : $\left(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{IA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

On a : $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IJ'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{BJ}\right)+\left(\overrightarrow{BG},\overrightarrow{IJ'}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IJ'}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}[2\pi]\equiv0[2\pi]$

Par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IJ'}$ sont colinéaires et de même sens

Et puisque : $IJ'=IA$ Alors : $J'=A$

Par suite : $r'(J)=A$

D'où : $\begin{cases} KJ=KA \\ \left(\overrightarrow{KJ},\overrightarrow{KA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Par conséquent : le triangle AKJ est isocèle et rectangle

Exercice8 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

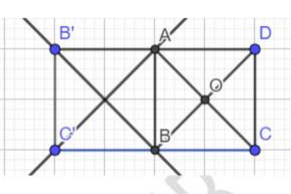
On considère la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

1) Déterminer et construire l'image des droites (AC) et (BD) par la rotation r

2) Montrer que les images des droites (AC) et (BD) par la rotation r sont sécantes et déterminer leur point d'intersection

Solution :1) Déterminons et construisons l'image des droites (AC) et (BD) par la rotation r

On a : r est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$



Donc : $r(A)=A$

On pose : $r(C)=C'$ donc : $\begin{cases} AC=AC' \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : le triangle $AC'C$ est rectangle et isocèle en A

Tel que : $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

On remarque que : $AC'BD$ est un parallélogramme

Par suite : l'image de la droite (AC) par la rotation r est la droite (AC')

On a : $\begin{cases} AD=AB \\ \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(D)=B$

On pose : $r(B)=B'$ donc : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : le triangle ABB' est rectangle et isocèle en A dans le sens indirect

Par suite : l'image de la droite (BD) par la rotation r est la droite (BB')

2) Montrons que les images des droites (AC) et (BD) par la rotation r sont sécantes et déterminons leur point d'intersection

On a : (AC) et (BD) sont sécantes en O

On pose : $r(O)=O'$ comme on sait que : $O\in(AC)$ et $r((AC))=(AC')$ alors : $O'\in(AC')$

Et aussi : $O\in(BD)$ et $r((BD))=(BB')$ alors : $O'\in(BB')$

Par suite : (AC') et (BB') sont sécantes en $r(O)=O'$

Exercice9 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soient I ; J et K les milieux respectifs des segments : $[AB]$; $[BC]$ et $[CD]$

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Faire une figure

2) a) Déterminer l'image du segment $[AB]$ par la rotation r

b) En déduire l'image du point I par la rotation r

3) Déterminer l'image de la droite (IJ) par la rotation r

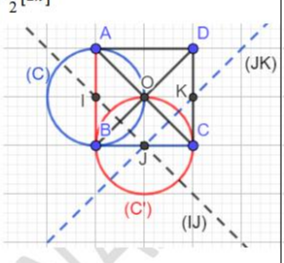
4) Soit (C) le cercle de centre I et de rayon IA

Déterminer et construire l'image (C') du cercle (C) par la rotation r

Solution :1) construction de la figure :voir figure

2) a) Déterminons l'image du segment $[AB]$ par la rotation r :

$\rightarrow$On a : $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$ et : $\begin{cases} OB=OC \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(B)=C$



Donc : l'image du segment $[AB]$ par la rotation r est segment $[BC]$

a) Déterminons l'image du point I par la rotation r

$\rightarrow$On a : I est le milieu du segment $[AB]$ donc $r(I)$ est le milieu du segment $[BC]$

Car : La rotation conserve le milieu

Et comme : J est le milieu du segment $[BC]$

Alors : $r(I)=J$

3) Déterminons l'image de la droite (IJ) par la rotation r

On sait que : l'image de la droite (IJ) par la rotation r est la droite $(I'J')$ avec : $r(I)=I'$ et $r(J)=J'$

$\rightarrow$On a : $\begin{cases} OC=OD \\ \left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(C)=D$ et on sait que : $r(B)=C$

Donc : l'image du segment $[BC]$ par la rotation r est segment $[CD]$

Et comme : J est le milieu du segment $[BC]$ donc $r(J)$ est le milieu du segment $[CD]$

Et comme : K est le milieu du segment $[CD]$

Alors : $r(J)=K$

Puisque : $r(I)=J$ et $r(J)=K$ alors l'image de la droite (IJ) par la rotation r est la droite (JK)

4) Déterminons et construisons l'image (C') du cercle (C) par la rotation r

On a : (C) le cercle de centre I et de rayon IA et comme : $r(I)=J$

Alors : l'image (C') du cercle (C) par la rotation r est le cercle de centre J et de rayon IA car la rotation conserves la distance

Exercice10 : On considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et soient I, J et K les milieux respectivement des segments $[BC]$;$[AC]$ et $[AB]$.

1) Déterminer l'angle de la rotation r de centre A qui transforme B en C

2) Déterminer l'image du point K par rotation r et en déduire l'image de la droite : (KI) par rotation r

Solution :1) On a : $r(A)=A$; $r(B)=C$

Donc : $\alpha\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

2) $r(K)=J$ et $r((KI))=(JI)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien