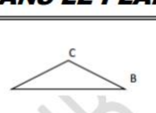
1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Série N°4 : *LA ROTATION DANS LE PLAN*

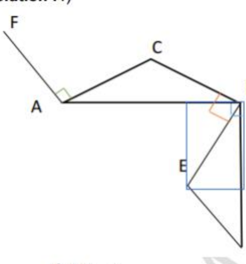
Exercice1 : Soit ABC un triangle comme indiqué la figure ci-contre :



Soit r est la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) Recopier la figure puis construire le point D image du point A par r
Puis le point E image de C par r.
2) construire F image du point C par le quart de tour direct r' de centre A
3) Montrer que AF =DE et que : (AF) et (DE) sont parallèles

Solution :1)



3) On a : $\begin{cases} r(A)=D \\ r(C)=E \end{cases}$ **Alors :** $r((AC))=(DE)$ et $(AC)\perp(DE)$ (1)

On a : $r'(C)=F$ donc : $AC=AF$ et $(AC)\perp(AF)$ (2)

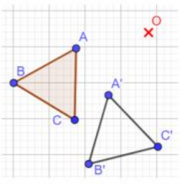
(1) et (2) donne : $AF=DE$ et $(DE)\parallel(AF)$

Exercice2 : ABC un triangle équilatéral et O un point à l'extérieur du triangle ABC

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$

Soient : A'; B' et C' les images respectives des points : A; B et C par la rotation r
1) Construire : A'; B' et C'
2) Déterminer la nature du triangle : $A'B'C'$

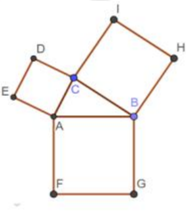
Solution : 1) Construction des points : A'; B' et C'



2) Déterminons la nature du triangle : $A'B'C'$
On a : $r(A)=A'$ et $r(B)=B'$ et $r(C)=C'$
Comme la rotation conserve les distances alors :
$A'B'=AB$; $A'C'=AC$; $B'C'=BC$
Et puisque : ABC un triangle équilatéral alors : $AB=AC=BC$
Ainsi : $A'B'=A'C'=B'C'$ et par suite $A'B'C'$ est un triangle équilatéral

Exercice3 : On construit IAB est un triangle isocèle et rectangle en I .
On construit à l'extérieur d'un triangle ABC tel que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ positif trois carrés :
ACDE ; BAFG et CBHI
1) Montrer que le triangle DCB est l'image du triangle ACI par une rotation r dont on déterminera le centre et l'angle
2) Montrer que les droites : (AH) et (CG) sont perpendiculaires

Solution :1) Montrons que le triangle DCB est l'image du triangle ACI par une rotation r dont on déterminera le centre et l'angle



Soit r_1 la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

→On a : ACDE est un carré d'où : $\begin{cases} CA=CD \\ (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r_1(A)=D$

→On a : BCIH est un carré d'où : $\begin{cases} CI=CB \\ (\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CB})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r_1(I)=B$

→On a : $r_1(C)=C$ car C le centre de r_1

Donc : le triangle DCB est l'image du triangle ACI par une rotation r de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

2) Montrons que les droites : (AH) et (CG) sont perpendiculaires

Soit r_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

→On a : ABGF est un carré d'où : $\begin{cases} BA=BG \\ (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BG})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ et donc : $r_2(A)=G$

→On a : BCIH est un carré d'où : $\begin{cases} BH=BC \\ (\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BC})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ et donc : $r_2(H)=C$

Ainsi : $AH=CG$ et $(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{GC})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : les droites : (AH) et (CG) sont perpendiculaires

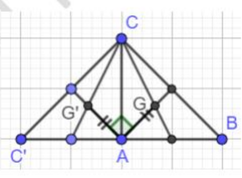
Exercice4 : Soient O ; A; B et C des points du plan orienté tel que :
$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et O le milieu du segment $[BC]$

Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
1) Construire les points A'; B' et C' image des points A; B et C par la rotation r
2) Montrer que : $\overrightarrow{A'B'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{A'C'}$
3) Montrer que : O' le milieu du segment $[B'C']$

Solution :1) Remarquer que les triangles : OAA' ; OBB' et OCC' sont équilatéraux en utilisant la définition de la rotation
2) Puisque : $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et que la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs
Alors : $\overrightarrow{A'B'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{A'C'}$
3) Puisque O le milieu du segment $[BC]$ et que la rotation conserve le milieu Alors : O' le milieu du segment $[B'C']$

Exercice5 : ABC est un triangle tel que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et G est le centre de gravité du triangle ABC ; Soient B'; C' et G' les images respectives des points : B; C et G par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$
1) Construire une figure
2) Justifier que : G' est le centre de gravité du triangle $AB'C'$

Solution : 1) Construisons une figure
G est le centre de gravité du triangle ABC donc G est l'intersection des médianes du triangle ABC



→On a : $\begin{cases} AB=AC \\ (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(B)=C$ donc : $B'=C$

→On a : $r(C)=C'\Leftrightarrow\begin{cases} AC=AC' \\ (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : C' est le symétrique de B par rapport a A

→On a : $r(G)=G'\Leftrightarrow\begin{cases} AG=AG' \\ (\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AG'})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

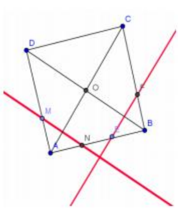
C'est-à-dire : que le triangle AGG' est direct et rectangle isocèle en A
2) Justifions que : G' est le centre de gravité du triangle $AB'C'$
On a : G est le centre de gravité du triangle ABC donc : G est le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;1)$ et $(C;1)$.
Donc : G' est le barycentre des points pondérés : $(A';1)$; $(B';1)$ et $(C';1)$.
Car la rotation conserve le barycentre.
Donc : G' est le barycentre des points pondérés : $(A;1)$; $(B';1)$ et $(C';1)$.
Donc : G' est le centre de gravité du triangle $AB'C'$

Exercice6 : ABC un triangle équilatéral tel que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$
1) Construire le point D de sorte que le quadrilatère ACBD soit un losange
2) a) Construire le centre Ω de la rotation r qui transforme A en B et B en C
b) Montrer que les points C ; D et Ω sont alignés
3)a) Déterminer l'image de la droite (ΩC) par la rotation r
b) Soit D' l'image du point D par la rotation r
Montrer que point D' appartient à la droite (ΩA)

Solution : 1) Construisons le point D de sorte que le quadrilatère ACBD soit un losange
2) a) Construisons le centre Ω de la rotation r qui transforme A en B et B en C

On a : $r(A)=B$ donc : $\Omega A=\Omega B$
D'où : Ω appartient à la médiatrice (L) du segment $[AB]$
On a : $r(B)=C$ donc : $\Omega B=\Omega C$
D'où : Ω appartient à la médiatrice (H) du segment $[BC]$
Comme : les points A ; B et C ne sont pas alignés alors les médiatrice (L) et (H) se coupent en un point Ω.
Le point Ω est donc le centre de la rotation r (d'angle : $\frac{2\pi}{3}$)
b) Montrons que les points C ; D et Ω sont alignés
On sait que : les médiatrices des côtés du triangle ABC se coupent en Ω qui est équidistant des trois sommets A ; B et C (Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC)
Et puisque : $\Omega A=\Omega B$ et $DA=DB$ et $CA=CB$ alors : les points Ω ; D et C sont des points de la médiatrice (L)
Par suite : les points C ; D et Ω sont alignés
3)a) Déterminons l'image de la droite (ΩC) par la rotation r
On a : $r(\Omega)=\Omega$ et $r(C)=A$
Donc : l'image de la droite (ΩC) par la rotation r est la droite (ΩA)
b) Montrons que point D' appartient à la droite (ΩA)
On a : $D\in(\Omega C)$ donc : $r(D)=D'\in(\Omega A)$
D'où : D' ; Ω et A sont alignés

Exercice7 : ABCD est un carré de centre O tel que : $(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B})$ positif. Soit (D) la droite parallèle a (BD) et coupe (AD) en M et coupe (AB) en N et soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
E et F les images M et N respectivement par la rotation r
1) Faire une figure et montrer que $(EF)\perp(MN)$
2) Déterminer l'image de la droite (BD) par la rotation r
3) Montrer que $DN=FA$ et $(EF)\parallel(AC)$



Solution :1) On a :❷ $r(N)=F$ et : ❶ $r(M)=E$
de ❶ et ❷ en déduit que : $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{EF})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : $(EF)\perp(MN)$

2) On a : $\begin{cases} 0B=0C \\ (\overrightarrow{0B},\overrightarrow{OC})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ Donc : $r(B)=C$ ❶

Et on a : $\begin{cases} 0D=0A \\ (\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $r(D)=A$ ❷

de ❶ et ❷ en déduit que: $r((BD))=(AC)$
3) $DN=FA$???

On a : ❶ $r(D)=A$ et ❷ $r(N)=F$

Donc : $DN=FA$

$(EF)\parallel(AC)$???

On a : $(MN)\parallel(BD)$ et $r((BD))=(AC)$ et $r((MN))=(EF)$
Donc : $(EF)\parallel(AC)$ car la rotation conserve le parallélisme

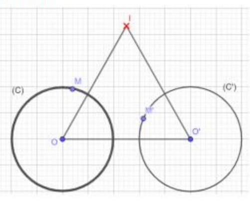
Exercice8 : On considère un carré ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soient E et F deux points respectivement des segments $[AB]$ et $[BC]$ tel que : $AE=BF$
H est le point d'intersection des droites (CE) et (AF)

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$
1) Déterminer les images des points A ; B ; D ; C ; E par la rotation r
2) Montrer que : H est l'orthocentre du triangle DEF

Solution :1) On a : $r(A)=B$; $r(B)=C$; $r(C)=D$ et $r(D)=A$
On pose : $r(E)=E'$
On a : $r([AB])=[BC]$ et puisque : $E\in[AB]$ alors $E'\in[BC]$
et puisque : la rotation r conserve les distance alors : $AE=BE'$ et comme : $AE=BF$
En déduit que : $E'=F$
2) On a : $r(D)=A$ et $r(E)=F$ et l'angle de r est $\frac{\pi}{2}$ donc : $(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{FA})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$
C'est-à-dire : $(EH)\perp(DF)$

Exercice9 : On considère un triangle équilatéral OIO' tel que : $OO'=5cm$ et $(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IO'})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$
Soient : (C) et (C') les deux cercles de rayon 2cm et de centre respectivement O et O'
M et M' deux points qui décrivent respectivement les cercles (C) et (C') tel que :
$(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$
1) Montrer que : le point I est le centre de la rotation r d'angle $\frac{\pi}{3}$ et qui transforme O en O'
2) Montrer que : $IM=IM'$
3) En déduire que la médiatrice du segment $[MM']$ passe par le point fixe I

Solution : 1) Montrons que : le point I est le centre de la rotation r d'angle $\frac{\pi}{3}$ et qui transforme O en O'



Le triangle OIO' est équilatéral tel que : $(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IO'})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$
D'où : $OI=IO'$ et $(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IO'})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$
Donc : $r(O)=O'$

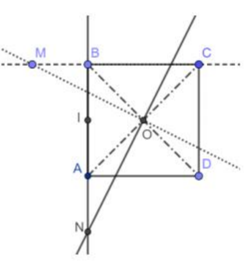
Donc : le point I est le centre de la rotation r d'angle $\frac{\pi}{3}$ et qui transforme O en O'
2) Montrons que : $IM=IM'$
On a : $r(O)=O'$ donc la rotation r transforme le cercle (C) en (C') et comme :
$(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc : $r(M)=M'$
Par suite : $IM=IM'$
3) En déduisons que la médiatrice du segment $[MM']$ passe par le point fixe I
On a : $IM=IM'$ donc : la médiatrice du segment $[MM']$ passe par le point fixe I

Exercice10 : On considère un carré ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit I le milieu du segment $[AB]$ et M un point de la droite (BC) tel que : $\overrightarrow{CM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ et que la droite perpendiculaire a la droite (OM) en O coupe la droite (AB) en N

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1)a) Déterminer les images des droites (OM) et (BC) par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$
b) Montrer que : $r(M)=N$
2) Vérifier que : $\overrightarrow{BN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ et $(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MD})\equiv(\overrightarrow{NO},\overrightarrow{NC})[2\pi]$
3) Montrer que : $AM=ON$ et en déduire la nature du triangle AMO

Solution : 1) a) Déterminons les images des droites (OM) et (BC) par la rotation : $r\left(O;\frac{\pi}{2}\right)$.



→On a : $\begin{cases} OB=OA \\ (\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ d'ou : $r(B)=A$

→On a : $\begin{cases} OC=OB \\ (\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ d'ou : $r(C)=B$

Donc : l'image de la droite (BC) par la rotation : $r\left(O;\frac{\pi}{2}\right)$ est la droite (AB)

→On a : $r(O)=O$ car O le centre de la rotation r
L'image de la droite (OM) par la rotation : $r\left(O;\frac{\pi}{2}\right)$ est la droite passant par O et perpendiculaire a (OM) et c'est (ON)

Donc : l'image de la droite (OM) par la rotation : $r\left(O;\frac{\pi}{2}\right)$ est la droite (ON)

b) Montrons que : $r(M)=N$

Soit M le point d'intersection de (BC) et (OM)

On a : l'image de la droite (OM) par la rotation : $r\left(O;\frac{\pi}{2}\right)$ est la droite (ON)

Er l'image de la droite (BC) par la rotation : $r\left(O;\frac{\pi}{2}\right)$ est la droite (AB)

D'où $r(M)$ le point d'intersection de (ON) et (AB) qui n'est autre que N

Par suite : $r(M)=N$

2) Vérifions que : $\overrightarrow{BN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ et $(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MD})\equiv(\overrightarrow{NO},\overrightarrow{NC})[2\pi]$

→On a : $r(B)=A$ et $r(M)=N$ et $r(C)=B$ et $\overrightarrow{CM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{BN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

→On a : $r(O)=O$ et $r(M)=N$ et $r(D)=C$

Donc : $(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MD})\equiv(\overrightarrow{NO},\overrightarrow{NC})[2\pi]$ car la rotation conserve la mesure des angles orientés

3) Montrons que : $AM=ON$ et en déduire la nature du triangle AMO
→Calculons : AM
On considère le triangle ABM rectangle en B
D'où : par application de Pythagore on a : $AM^2=AB^2+BM^2$

$AM^2=AB^2+\left(\frac{1}{2}BC\right)^2$; $(AB=BC)$

$AM^2=AB^2+\frac{1}{4}AB^2=\frac{5}{4}AB^2$

D'où : $AM=\frac{\sqrt{5}}{2}AB$ ❶

→Calculons : ON
On considère le triangle BMN rectangle en B
D'où : par application de Pythagore on a : $MN^2=MB^2+BN^2$

$MN^2=\left(\frac{1}{2}BC\right)^2+\left(\frac{3}{2}AB\right)^2$

$MN^2=\frac{1}{4}AB^2+\frac{9}{4}AB^2=\frac{5}{2}AB^2$

On considère le triangle OMN rectangle en O
D'où : par application de Pythagore on a : $ON^2+OM^2=MN^2$ et $OM=ON$
D'où : $2OM^2=MN^2$ c'est-à-dire : $ON^2=\frac{1}{2}MN^2=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}AB^2=\frac{5}{4}AB^2$

Donc : $ON=\frac{\sqrt{5}}{2}AB$ ❷

De ❶et❷: en déduit que : $AM=ON$
Donc : AMO est un triangle isocèle en M

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien