1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction série N°5 : *LA ROTATION DANS LE PLAN*

Exercice1 : ABCD est un rectangle dont la longueur est le double de la largeur tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

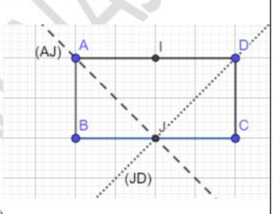
Soient I ; J les milieux respectifs des segments : $[AD]$ et $[BC]$

On considère la rotation r de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Déterminer et construire l'image de la droite (AJ) par la rotation r

2) Montrer que le triangle AJD est rectangle en J

Solution : 1) Déterminons et construisons l'image de la droite (AJ) par la rotation r



On a : $\begin{cases} IA=IJ \\ \left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IJ}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ donc : $r(A)=J$

On a : $\begin{cases} IJ=ID \\ \left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{ID}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ donc : $r(J)=D$

Donc : l'image de la droite (AJ) par la rotation r est la droite (JD)

2) Montrons que le triangle AJD est rectangle en J

Comme : $\frac{\pi}{2}$ est l'angle de la rotation r et $r(A)=J$ et $r(J)=D$

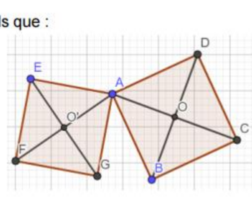
Alors : $\left(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{JD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : les droites (AJ) et (JD) sont perpendiculaires

Par suite : le triangle AJD est rectangle en J

Exercice2 : On considère les carrés ABCD et AEFG ci-contre tels que :

$AB=AG$ et $\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$



On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

1) Montrer que $r(E)=B$

2) Montrer que $r(F)=C$

3) Soient O et O' les centres respectivement des carrés ABCD et AEFG

Montrer que : O' est l'image du point O par r^{-1} la rotation réciproque de r

Solution : 1) Montrons que $r(E)=B$

On a : $AB=AG$ et $AE=AG$ donc : $AB=AE$ et d'après Chasles appliquée au angles orientés on obtient : $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AG}\right)+\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}[2\pi]\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Alors : $r(E)=B$

2) Montrons que $r(F)=C$

Les diagonales des deux carrés ABCD et AEFG sont de même longueur : $AF=AG$

Et On a : $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG}\right)+\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}[2\pi]\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Puisque : $AF=AC$ et $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ Alors : $r(F)=C$

2) Montrons que : $r^{-1}(O)=O'$

On a : la rotation r de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

Donc : la rotation r^{-1} est de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

Montrons que : $AO=AO'$ et $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'}\right)\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

On a : O et O' les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AF]$ donc : $AO=AO'$

Et On a : $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)+\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AF}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}[2\pi]\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Puisque : $AO=AO'$ et $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'}\right)\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Alors : O' est l'image du point O par r^{-1} la rotation réciproque de r

Exercice3 : ABC un triangle équilatéral tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Montrer qu'il existe une rotation r qui transforme A en B et transforme B en C dont on déterminera le centre et l'angle

Solution : S'il existe une rotation r qui transforme A en B et transforme B en C

Alors son centre O vérifie : $OA=OB$ et $OB=OC$

Donc : O appartient à la fois à la médiatrice de $[AB]$ et $[BC]$

Donc : O est le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC

Donc : O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

Et puisque : $r(A)=B$ et $r(B)=C$ alors l'angle de la rotation r est : $\alpha\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)[2\pi]$

Exercice4 : On considère un carré ABCD tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit M un point quelconque de la droite (CD) distinct de C et de D

la droite qui passe par A et perpondiculaire a la droite (AM) en O coupe la droite (BC) en N

On considère la rotation r de centre A et qui transforme D en B

1) Déterminer un angle de la rotation r

2) Déterminer l'image de la droite (DC) par la rotation r

3) Montrer que : $r(M)=N$

4) En déduire la nature du triangle AMN

Solution : 1) Déterminer un angle de la rotation r

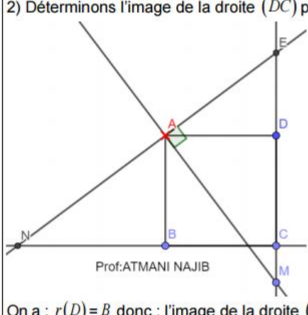
→On a : $r(D)=B$ d'ou : $\begin{cases} AD=AB \\ \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\alpha[2\pi]\end{cases}$

Et puisque : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

On a alors : $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : $\alpha\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ par suite : un angle de la rotation r est $-\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire : $r\left(A;-\frac{\pi}{2}\right)$

2) Déterminons l'image de la droite (DC) par la rotation r



On a : $r(D)=B$ donc : l'image de la droite (DC) par la rotation r est la droite qui passe $r(D)=B$ et perpondiculaire a la droite : (DC) (car un angle de la rotation r est $-\frac{\pi}{2}$) et comme : $(BC)\perp(DC)$

Alors : l'image de la droite (DC) par la rotation r est la droite (BC)

3) Montrons que : $r(M)=N$

Posons : $r(M)=M'$

On a : $r((DC))=(BC)$ et $M\in(DC)$ alors : $M'\in(BC)$

On a : $r(M)=M'$ alors : $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Alors : $M'\in(\Delta)$ passant par A et perpondiculaire a la droite : (AM)

Alors : $M'\in(\Delta)\cap(BC)$ C'est-à-dire : $M'=N$

Par suite : $r(M)=N$

4) Déduisons la nature du triangle AMN

On a : $r(M)=N$ donc : $\begin{cases} AM=AN \\ \left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

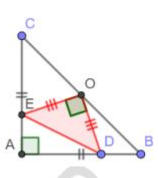
Donc : AMN est un triangle isocèle et rectangle en A

Exercice5 : ABC est un triangle isocèle et rectangle en A tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ positif et O le milieu du segment $[BC]$. D et E deux points tels que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

Montrer que ODE est un triangle isocèle et rectangle en O

Solution : Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

il suffit de montrer que : $r(E)=D$????



On pose :❶ $r(C)=A$: donc $\begin{cases} OA=OC \\ \ldots\end{cases}$: On a $r(E)=E'$

Et on a : $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ donc : $r(A)=B$ ❷ Et on a : $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ ❸

De ❶et❷et❸: en déduit que : $\overrightarrow{AE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❹ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs et on sait que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❺

De❹et ❺ en déduit que : $\overrightarrow{AE'}=\overrightarrow{AD}$ c'est-à-dire : $E'=D$

Donc : $r(E)=D$ par suite : $\begin{cases} OE=OD \\ \left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc ODE est un triangle isocèle et rectangle en O

Exercice6 : On considère un cercle (C) circonscrit a un triangle équilatéral ABC tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit M un point de l'arc AC ne contenant pas le point B

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

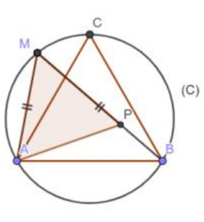
1) Soit P un point appartenant au segment $[BM]$ tel que : $MP=MA$

a) Montrer que : AMP est un triangle équilatéral.

b) Montrer que : M est l'image du point P par la rotation r

2) En déduire que : $MA+MC=MB$

Solution : 1) a) Montrons que : AMP est un triangle équilatéral.



On a : $MP=MA$ d'où : $\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PA}\right)[2\pi]$

Et comme :les deux angles AMP et ACB interceptent le même arc AB alors : $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MP}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

D'où : $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MP}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

On sait que : $\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM}\right)+\left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PA}\right)+\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MP}\right)\equiv\pi[2\pi]$

C'est-à-dire : $2\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)[2\pi]\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

D'où : $\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Ainsi : $\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MP}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc : AMP est un triangle équilatéral.

b) Montrons que : M est l'image du point P par la rotation r

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On a : $\begin{cases} AP=AM \\ \left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$

Donc : M est l'image du point P par la rotation r

2) Déduisons que : $MA+MC=MB$

On a : $MP=MA$ car : AMP est un triangle équilatéral.

On a : $MC=PB$ car $r(P)=M$ et $r(B)=C$

Et les points : M ; P et B sont alignés dans le même sens

D'où : $MP+PB=MB$

Donc : $MA+MC=MB$

Exercice7 : Soit ABC un triangle équilatéral inscrit dans un cercle (C) tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

. Soit M un point de l'arc AC ne contenant pas le point B (M distincts de A et C)

Soit I un point appartenant au segment $[BM]$ tel que : $IM=AM$

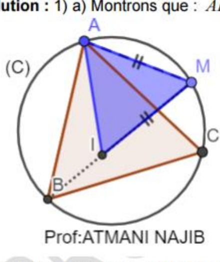
1) Montrer que : AIM est un triangle équilatéral.

2) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer : $r(B)$ et $r(I)$

b) En déduire que : $MA+MC=MB$

Solution : 1) a) Montrons que : AIM est un triangle équilatéral.



On a : $IA=IM$ donc : AIM est un triangle isocèle de sommet M

Et comme : les deux angles AMI et ACB interceptent le même arc AB alors : $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MI}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)[2\pi]$ et puisque ABC est un triangle équilatéral

Alors : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

D'où : $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MI}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

On a : AIM est un triangle isocèle et l'un ses angles mesure : $\frac{\pi}{3}$

Donc : AIM est un triangle équilatéral

2) a) Déterminons : $r(B)$ et $r(I)$

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

On a : $\begin{cases} AB=AC \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$ et $\begin{cases} AI=AM \\ \left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$

Donc : $r(B)=C$ et $r(I)=M$

b) Déduisons que :

On a : $I\in[BM]$ donc : $BM=IB+IM$ (1)

On a aussi : $r(B)=C$ et $r(I)=M$

Alors : $IB=MC$ (2) car la rotation conserve les distances

Et comme : AIM est un triangle équilatéral

Alors : $IM=MA$ (3)

De : (1) ; (2) et (3) on en déduit que : $MA+MC=IM+IB=BM$

Exercice8 : On considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soient I, J, K et L les milieux respectivement des segments $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$ et $[DA]$.

P, Q, R et S sont les points d'intersection respectives des droites (BL) et (IC) ; (JD) et (IC) ; (JD) et (AK) ; (AK) et (BL).

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1)a) Justifier que : $r(A)=B$; $r(B)=C$; $r(C)=D$ et $r(D)=A$

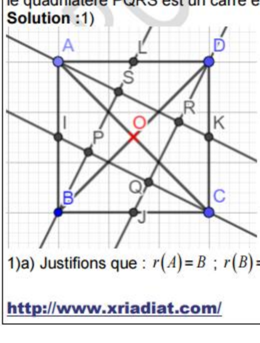
b) En déduire que : $r(I)=J$; $r(J)=K$; $r(K)=L$ et $r(L)=I$

2) Montrer que : $r(P)=Q$; $r(Q)=R$; $r(R)=S$ et $r(S)=P$

3) a) Montrer que les points : O ; P et R sont alignés et en déduire que les points :O ; Q et S sont aussi alignés

b) Montrer que : $PR=QS$ et que les droites (PR) et (QS) sont perpendiculaires puis en déduire que le quadrilatère PQRS est un carré et a le même centre que le carré ABCD

Solution :1)



1)a) Justifions que : $r(A)=B$; $r(B)=C$; $r(C)=D$ et $r(D)=A$

Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du carré ABCD sont perpendiculaires et se coupe en leur milieu O

Donc : →On a : $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ d'ou : $r(A)=B$

→On a : $\begin{cases} OB=OC \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ d'ou : $r(B)=C$

→On a : $\begin{cases} OC=OD \\ \left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ d'ou : $r(C)=D$

→On a : $\begin{cases} OD=OA \\ \left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ d'ou : $r(D)=A$

b) En déduisons que : $r(I)=J$; $r(J)=K$; $r(K)=L$ et $r(L)=I$

→On a : I le milieu du segment $[AB]$ donc : $r(I)$ est le milieu du segment $[r(A)r(B)]$ l'image du Segment :$[AB]$

Or : $r(A)=B$ et $r(B)=C$ et J le milieu du segment $[BC]$

Donc : $r(I)=J$

→On a : J le milieu du segment $[BC]$ donc : $r(J)$ est le milieu du segment $[r(B)r(C)]$ l'image du Segment $[BC]$

Or : $r(B)=C$ et $r(C)=D$ et K le milieu du segment $[CD]$

Donc : $r(J)=K$

→On a : K le milieu du segment $[CD]$ donc : $r(K)$ est le milieu du segment $[r(C)r(D)]$ l'image du segment $[CD]$

Or : $r(C)=D$ et $r(D)=A$ et L le milieu du segment $[DA]$

Donc : $r(K)=L$

→On a : L le milieu du segment $[DA]$ donc : $r(L)$ est le milieu du segment $[r(D)r(A)]$ l'image du segment $[DA]$

Or : $r(D)=A$ et $r(A)=B$ et I le milieu du segment $[AB]$

Donc : $r(L)=I$

2) Montrons que : $r(P)=Q$; $r(Q)=R$; $r(R)=S$ et $r(S)=P$

→On a : P est le point d'intersection des droites (BL) et (IC)

Or : $r(B)=C$; $r(L)=I$; $r(I)=J$ et $r(C)=D$ donc : $r((BL))=(IC)$ et $r((IC))=(JD)$

Donc : $r(P)$ est le point d'intersection des droites (IC) et (JD)

Comme : Q est le point d'intersection des droites (IC) et (JD)

Donc : $r(P)=Q$

→On a : Q est le point d'intersection des droites (JD) et (IC)

Or : $r(J)=K$; $r(D)=A$; $r(I)=J$ et $r(C)=D$ donc : $r((JD))=(AK)$ et $r((IC))=(JD)$

Donc : $r(Q)$ est le point d'intersection des droites (JD) et (AK)

Comme : R est le point d'intersection des droites (JD) et (AK)

Donc : $r(Q)=R$

→On a : R est le point d'intersection des droites (JD) et (AK)

Or : $r(J)=K$; $r(D)=A$; $r(A)=B$ et $r(K)=L$ donc : $r((JD))=(AK)$ et $r((AK))=(BL)$

Donc : $r(R)$ est le point d'intersection des droites (BL) et (AK)

Comme : S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK)

Donc : $r(R)=S$

→On a : S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK)

Or : $r(B)=C$; $r(L)=I$; $r(A)=B$ et $r(K)=L$ donc : $r((BL))=(CI)$ et $r((AK))=(BL)$

Donc : $r(S)$ est le point d'intersection des droites (BL) et (CI)

Comme : P est le point d'intersection des droites (BL) et (CI)

Donc : $r(S)=P$

3) a) →Montrons que les points : O ; P et R sont alignés

On a : $r(P)=Q$ donc : $\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ aussi : $r(Q)=R$ donc : $\left(\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'après Chasles appliquée au angles orientés on obtient :

$\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OR}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\right)+\left(\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}[2\pi]\equiv\pi[2\pi]$

Ce qui signifie que : les points O ; P et R sont alignés

→Déduisons que les points :O ; Q et S sont aussi alignés

On a : les points O ; P et R sont alignés donc leurs images sont aussi alignées

Car la rotation conserve l'alignement des points

Et comme : : $r(O)=O$; $r(P)=Q$ et $r(R)=S$

Alors : les points :O ; Q et S sont aussi alignés

b) →Montrons que : $PR=QS$

On a : $r(P)=Q$; $r(R)=S$ et comme la rotation conserve les distances

Alors : $PR=QS$

→Montrons que : les droites (PR) et (QS) sont perpendiculaires puis déduisons que le carré PQRS a le même centre que le carré ABCD

On a : $r(P)=Q$; $r(R)=S$ donc : $\left(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{QS}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : les droites (PR) et (QS) sont perpendiculaires

Donc : le quadrilatère PQRS est un carré (diagonales perpendiculaires et isométriques)

Et a le même centre que le carré ABCD

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien