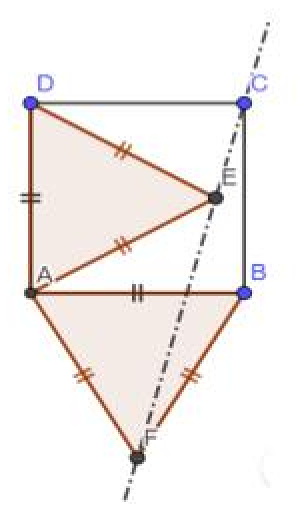
1er BAC Sciences EX et Mathématiques BIOF

Correction Série N°6 : *LA ROTATION DANS LE PLAN*

Exercice1 : ABCD est un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ positif. et AED et AFB deux triangles équilatéraux

Montrer que les points : E et C et F sont alignés

Solution : Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$: $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$



et soit K l'antécédent de C par r

On a : $r(B)=F$ Car $\begin{cases} AB=AF \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(D)=E$ Car $\begin{cases} AD=AE \\ \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(K)=C$

Donc : $AK=AC$ et $\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Puisque : $AB=BC$ donc B appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

et $AD=DC$ donc D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

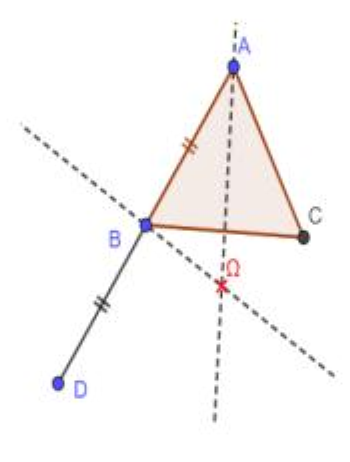
et on a : $AK=AC$ et $\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc : AKC est équilatéral donc K appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

Donc les points : K et B et D sont alignés

Et puisque la rotation conserve les alignements des points alors:les points : E et C et F sont alignés

Exercice2 : ABC un triangle équilatéral tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$



Soit D le symétrique du point A par rapport à B

On désigne par r la rotation qui transforme C en B et transforme A en D

1) Construire le point Ω centre de la rotation r et déterminer son angle

2) Montrer que : $AB\Omega C$ est un quadrilatère inscriptible

Solution : Ω centre de la rotation r qui transforme C en B et transforme A en D

Alors Ω vérifie : $\Omega C=\Omega B$ et $\Omega A=\Omega D$

Donc : Ω appartient à la fois à la médiatrice de $[BC]$ et $[AD]$

Donc : Ω est le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC

Donc : O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

Et puisque : $r(A)=D$ et $r(C)=B$ alors l'angle de la rotation r est :

$\alpha\equiv\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DB}\right)[2\pi]\equiv\left(\overrightarrow{AC},-\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]\equiv\pi+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$

Donc : $\alpha\equiv\pi-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]\equiv\pi-\frac{\pi}{3}[2\pi]\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Par conséquent : $\frac{2\pi}{3}$ est mesure de l'angle de la rotation

2) Montrons que : $AB\Omega C$ est un quadrilatère inscriptible

Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC

Montrons que : $\Omega\in(C)$

Puisque $r(\Omega)=\Omega$ et $r(C)=B$ alors l'angle de la rotation r est : $\left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega B}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

C'est-à-dire : $B\Omega C=\frac{2\pi}{3}$ et puisque : $ABC=\frac{\pi}{3}$

Alors : $B\Omega C+ABC=\pi$

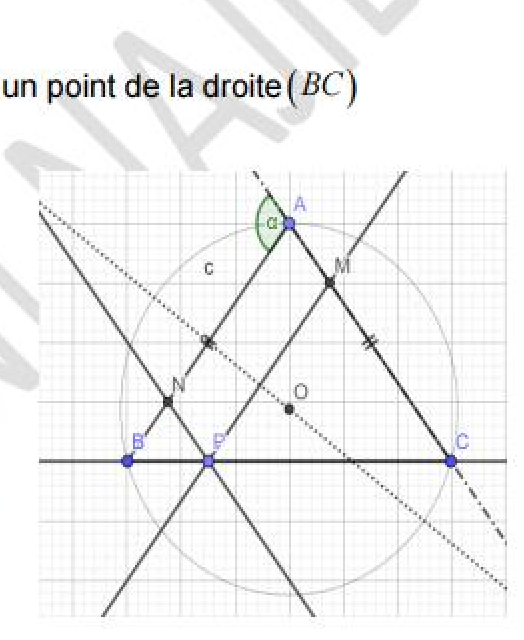
Donc : $\Omega\in(C)$

D'où : $AB\Omega C$ est un quadrilatère inscriptible

Exercice3 : ABC un triangle isocèle tel que : $AB=AC$ et soit P un point de la droite (BC)

La droite qui passe par P et parallèle a (AC) coupe (AB) en N

La droite qui passe par P et parallèle a (AB) coupe (AC) en M



1) Montrer qu'il existe une rotation r qui transforme B en A et transforme A en C dont on déterminera le centre et l'angle

2) Déterminer : $r(M)$

3) En déduire que la médiatrice du segment $[MN]$ passe par un point fixe quand P varie sur la droite (BC)

Solution : 1) S'il existe une rotation r qui transforme B en A et transforme A en C

Alors son centre O vérifie : $OA=OB$ et $OA=OC$

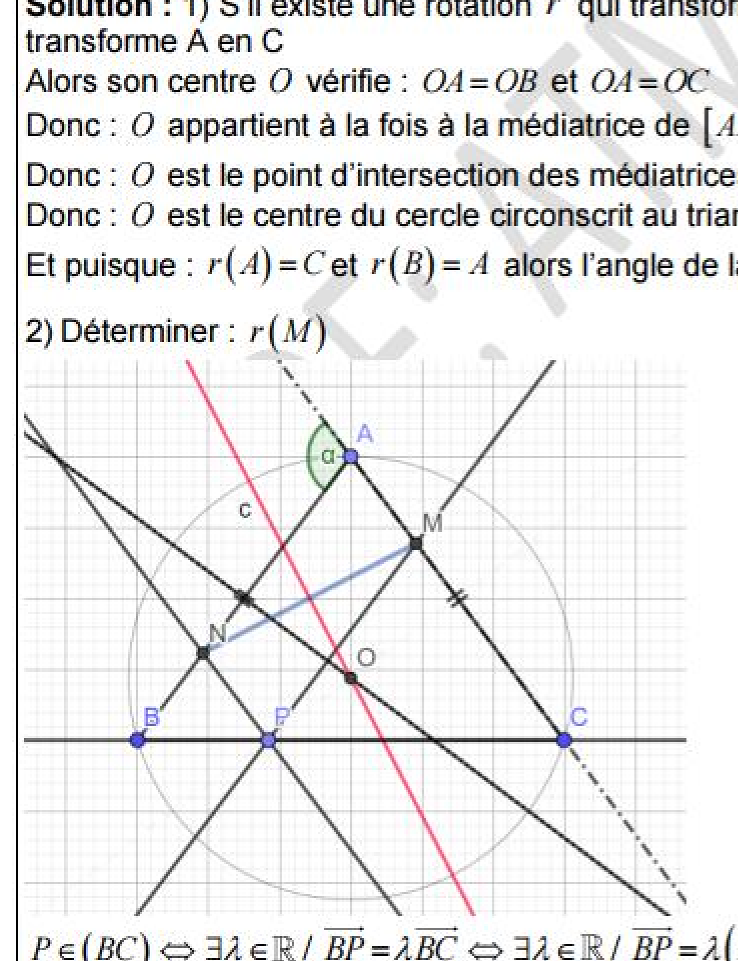
Donc : O appartient à la fois à la médiatrice de $[AB]$ et $[AC]$

Donc : O est le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC

Donc : O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

Et puisque : $r(A)=C$ et $r(B)=A$ alors l'angle de la rotation r est : $\alpha\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\right)[2\pi]$

2) Déterminer : $r(M)$



$P\in(BC)\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\overrightarrow{BP}=\lambda\left(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PC}\right)\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BP}+\lambda\overrightarrow{PC}$

$\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/(1-\lambda)\overrightarrow{BP}-\lambda\overrightarrow{PC}=\vec{0}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/-(1-\lambda)\overrightarrow{PB}-\lambda\overrightarrow{PC}=\vec{0}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/(1-\lambda)\overrightarrow{PB}+\lambda\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

C'est-à-dire : P est le barycentre du système pondéré : $\{(B,1-\lambda);(C,\lambda)\}$ car $(1-\lambda)+\lambda=1\neq0$

Soit : g la projection sur (AB) parallèlement a (AC) et f la projection sur (AC) parallèlement a (AB)

On a : $g(P)=N$ et $f(P)=M$ et puisque la projection conserve le barycentre :

Alors : $f(P)=M$ est le barycentre du système pondéré : $\{(f(B),1-\lambda);(f(C),\lambda)\}$

Alors : M est le barycentre du système pondéré : $\{(A,1-\lambda);(C,\lambda)\}$ car $f(B)=A$ et $f(C)=C$

Aussi : $g(P)=N$ est le barycentre du système pondéré : $\{(g(B),1-\lambda);(g(C),\lambda)\}$

Alors : N est le barycentre du système pondéré : $\{(B,1-\lambda);(A,\lambda)\}$ ❶ car $g(B)=B$ et $g(C)=A$

Donc : $r(M)$ est le barycentre du système pondéré : $\{(r(A),1-\lambda);(r(C),\lambda)\}$ car la rotation conserve le barycentre

Donc : $r(M)$ est le barycentre du système pondéré : $\{(B,1-\lambda);(A,\lambda)\}$ ❷ car $r(B)=A$ et $r(A)=C$

De ❶et❷: en déduit que : $r(M)=N$

3) Puisque : $r(M)=N$ alors : $OM=ON$

Par suite : la médiatrice de $[MN]$ passe par le point fixe O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC quand P varie sur la droite (BC)

Exercice4 : ABC est un triangle isocèle en A tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

1) a) Construire des carrés ABDE et ACFG de centre respectifs I et J et $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

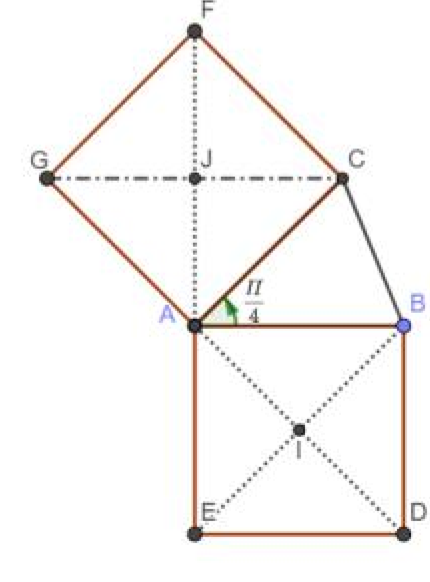
b) Donner les mesures des angles orientés : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$

2)a) Déterminer les images respectives des points E et C par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

b) En déduire que : $BG=CE$

Solution : 1) a) Construisons les carrés ABDE et ACFG : Voir figure

b) Donnons les mesures des angles orientés : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$



→On a : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)[2\pi]$ car ABC est un triangle isocèle en A

On a aussi : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et

$\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\pi[2\pi]$

D'où : $2\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)+\frac{\pi}{4}\equiv\pi[2\pi]$ c'est-à-dire :

$\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{3\pi}{8}[\pi]$

2)a) Déterminons les images respectives des points E et C par r

On a : $AE=AB$ et $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ car AEDB carré

Donc : $r(E)=B$

On a : $AC=AG$ et $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ car ACFG carré

Donc : $r(C)=G$

b) Déduisons que : $BG=CE$

Methode1 : On a : $r(E)=B$ et $r(C)=G$

Puisque la rotation conserve les distances alors : $BG=CE$

Methode2 : On considère le triangle : ACE d'après le théorème d'alkhashi :

$CE^2=AE^2+AC^2-2AE\times AC\cos\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC}\right)$

On a : $r(A)=A$ et $r(E)=B$ et $r(C)=G$

D'où : $AE=AB$; $AC=AG$; $EC=BG$ car la rotation conserve les distances

Et $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)$ car la rotation conserve la mesure des angles orientés

Par suite : $CE^2=AB^2+AG^2-2AB\times AG\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)$

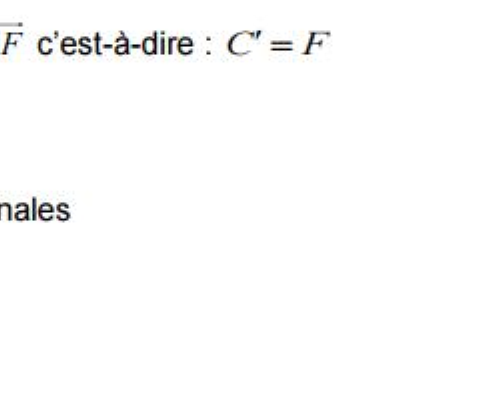
On considère le triangle : ABG d'après le théorème d'alkhashi :

$AB^2+AG^2-2AB\times AG\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)=BG^2$

D'où : $CE^2=BG^2$ donc : $BG=CE$

Exercice5 : ABCD est un parallélogramme

On construit à l'extérieur deux triangles ABE et ADF



On considère la rotation r de centre E et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Et soit C' l'image du point C par la rotation r

1) Montrer que : $AC'=AF$

2) Montrer que : $\left(\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{AF}\right)\equiv0[2\pi]$

3) En déduire que : $C'=F$

Solution : 1) On a : $r(B)=A$ et $r(C)=C'$

Donc : $AC'=BC$ et puisque : $AD=AF=BC$ alors $AC'=AF$

2) On a : $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}\right)+\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC'}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et comme ; $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Alors : $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC'}\right)\equiv0[2\pi]$

2) Puisque on a : $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC'}\right)\equiv0[2\pi]$ et $AC'=AF$ Alors : $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AF}$ c'est-à-dire : $C'=F$

Exercice6 : ABCD est un carré tel que :

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ Positif et Soit r la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$

Décomposer la rotation r en composée de deux symétries orthogonales

Solution : $r=S_{(AD)}\circ S_{(AC)}$ car $(AD)\cap(AC)=\{A\}$ et $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

OU $r=S_{(AC)}\circ S_{(AB)}$ car $(AB)\cap(AC)=\{A\}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Exercice7 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ positif

On considère les deux rotations suivantes : $r_1\left(O;\frac{\pi}{2}\right)$ et $r_2(O;-\pi)$

1) Quelle est l'image du point A par la rotation : $r_2\circ r_1$

2) Quelle est l'image du cercle (C) de centre B et de rayon OA par la rotation $r_2\circ r_1$

Solution : 1) Déterminons l'image du point A par la rotation : $r_2\circ r_1$

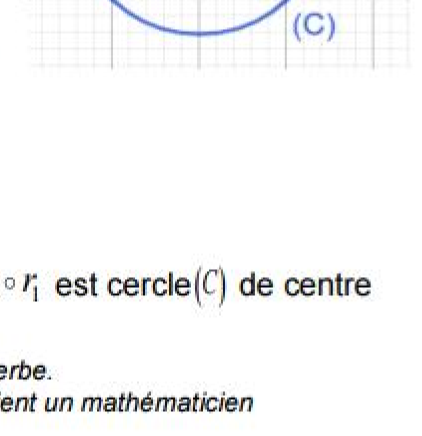
Méthode1 : Soit : $(r_2\circ r_1)(A)=A''$

On a : $A''=(r_2\circ r_1)(A)=r_2(r_1(A))$ et on a : $r_1(A)=B$ Car : $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

C'est-à-dire : $A''=r_2(B)$ et on a : $r_2(B)=D$ Car : $\begin{cases} OB=OD \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}\right)\equiv-\pi[2\pi] \end{cases}$

D'où : $(r_2\circ r_1)(A)=D$

Par suite l'image du point A par la rotation : $r_2\circ r_1$ est D



Méthode2 : $r_2\circ r_1$ est la rotation de centre O et d'angle :

$\frac{\pi}{2}+(-\pi)=-\frac{\pi}{2}$

Donc : $r_2\circ r_1\left(O;-\frac{\pi}{2}\right)$

$r_2\circ r_1(A)=D$ car $\begin{cases} OA=OD \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

2) Déterminons l'image du cercle (C) de centre B et de rayon OA par la rotation $r_2\circ r_1$

On a : $r_2\circ r_1(B)=A$ car $\begin{cases} OB=OA \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

D'où : l'image du cercle (C) de centre B et de rayon OA par la rotation $r_2\circ r_1$ est cercle (C) de centre A et de rayon OA

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien