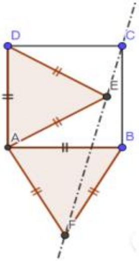
## 1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

# Correction : Série N°6 : *LA ROTATION DANS LE PLAN*

**Exercice1 :** ABCD est un carré tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$ positif. et AED et AFB deux triangles équilatéraux

Montrer que les points : E et C et F sont alignés

**Solution :** Soit $r$ la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ **:** $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$



et soit K l'antécédent de C par $r$

On a : $r(B)=F$ Car $\begin{cases} AB=AF \\ \left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(D)=E$ Car $\begin{cases} AD=AE \\ \left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(K)=C$

Donc : $AK=AC$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Puisque : $AB=BC$ donc $B$ appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

et $AD=DC$ donc $D$ appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

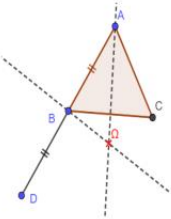
et on a : $AK=AC$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc : AKC est équilatéral donc $K$ appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

Donc les points : K et B et D sont alignés
Et puisque la rotation conserve les alignements des points alors:les points : E et C et F sont alignés

**Exercice2 :** ABC un triangle équilatéral tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Soit D le symétrique du point A par rapport à B
On désigne par $r$ la rotation qui transforme C en B et transforme A en D
1) Construire le point $\Omega$ centre de la rotation $r$ et déterminer son angle
2) Montrer que : $AB\Omega C$ est un quadrilatère inscriptible



**Solution :** $\Omega$ centre de la rotation $r$ qui transforme C en B et transforme A en D
Alors $\Omega$ vérifie : $\Omega C=\Omega B$ et $\Omega A=\Omega D$

Donc : $\Omega$ appartient à la fois à la médiatrice de $[BC]$ et $[AD]$

Donc : $\Omega$ est le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC
Donc : $O$ est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

Et puisque : $r(A)=D$ et $r(C)=B$ alors l'angle de la rotation $r$ est :

$$\alpha\equiv\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DB}}\right)[2\pi]\equiv\left(\overline{\overrightarrow{AC},-\overrightarrow{AB}}\right)[2\pi]\equiv\pi+\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)[2\pi]$$

Donc : $\alpha\equiv\pi-\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]\equiv\pi-\frac{\pi}{3}[2\pi]\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

PROF: ATMANI N

Par conséquent : $\frac{2\pi}{3}$ est mesure de l'angle de la rotation

2) Montrons que : $AB\Omega C$ est un quadrilatère inscriptible

Soit $(C)$ le cercle circonscrit au triangle ABC

Montrons que : $\Omega \in (C)$

Puisque $r(\Omega)=\Omega$ et $r(C)=B$ alors l'angle de la rotation $r$ est : $\left(\overline{\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega B}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

C'est-à-dire : $B\Omega C=\frac{2\pi}{3}$ et puisque : $ABC=\frac{\pi}{3}$

Alors : $B\Omega C+ABC=\pi$

Donc : $\Omega \in (C)$

D'où : $AB\Omega C$ est un quadrilatère inscriptible

**Exercice3 :** ABC un triangle isocèle tel que : $AB=AC$ et soit $P$ un point de la droite $(BC)$

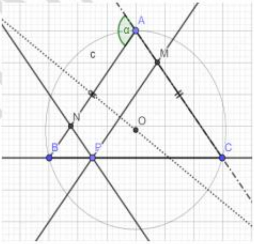
La droite qui passe par $P$ et parallèle a $(AC)$ coupe $(AB)$ en $N$

La droite qui passe par $P$ et parallèle a $(AB)$ coupe $(AC)$ en $M$

1) Montrer qu'il existe une rotation $r$ qui transforme B en A et transforme A en C dont on déterminera le centre et l'angle

2) Déterminer : $r(M)$

3) En déduire que la médiatrice du segment $[MN]$ passe par un point fixe quand $P$ varie sur la droite $(BC)$



**Solution :** 1) S'il existe une rotation $r$ qui transforme B en A et transforme A en C

Alors son centre $O$ vérifie : $OA=OB$ et $OA=OC$

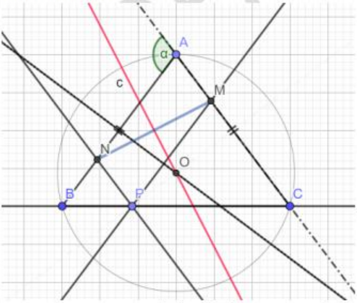
Donc : $O$ appartient à la fois à la médiatrice de $[AB]$ et $[AC]$

Donc : $O$ est le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC

Donc : $O$ est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

Et puisque : $r(A)=C$ et $r(B)=A$ alors l'angle de la rotation $r$ est : $\alpha \equiv \left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}}\right)[2\pi]$

2) Déterminer : $r(M)$



$P\in(BC) \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R} / \overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R} / \overrightarrow{BP}=\lambda\left(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PC}\right) \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R} / \overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BP}+\lambda\overrightarrow{PC}$

PROF: ATMANI NAJIB

$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/(1-\lambda)\overrightarrow{BP}-\lambda\overrightarrow{PC}=\vec{0} \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/-(1-\lambda)\overrightarrow{PB}-\lambda\overrightarrow{PC}=\vec{0} \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/(1-\lambda)\overrightarrow{PB}+\lambda\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

C'est-à-dire : $P$ est le barycentre du système pondéré : $\{(B\ ,1-\lambda);(C\ ,\lambda)\}$ car $(1-\lambda)+\lambda=1\neq 0$

Soit : $g$ la projection sur $(AB)$ parallèlement a $(AC)$ et $f$ la projection sur $(AC)$ parallèlement a $(AB)$

On a : $g(P)=N$ et $f(P)=M$ et puisque la projection conserve le barycentre :

Alors : $f(P)=M$ est le barycentre du système pondéré : $\{(f(B)\ ,1-\lambda);(f(C)\ ,\lambda)\}$

Alors : $M$ est le barycentre du système pondéré : $\{(A\ ,1-\lambda);(C\ ,\lambda)\}$ car $f(B)=A$ et $f(C)=C$

Aussi : $g(P)=N$ est le barycentre du système pondéré : $\{(g(B)\ ,1-\lambda);(g(C)\ ,\lambda)\}$

Alors : $N$ est le barycentre du système pondéré : $\{(B\ ,1-\lambda);(A\ ,\lambda)\}$ ❶ car $g(B)=B$ et $g(C)=A$

Donc : $r(M)$ est le barycentre du système pondéré : $\{(r(A),1-\lambda);(r(C),\lambda)\}$ car la rotation conserve le barycentre

Donc : $r(M)$ est le barycentre du système pondéré : $\{(B\ ,1-\lambda);(A\ ,\lambda)\}$ ❷ car $r(B)=A$ et $r(A)=C$

De ❶et❷: en déduit que : $r(M)=N$

3) Puisque : $r(M)=N$ alors : $OM=ON$

Par suite : la médiatrice de $[MN]$ passe par le point fixe $O$ le centre du cercle circonscrit au triangle ABC quand $P$ varie sur la droite $(BC)$

**Exercice4 :** ABC est un triangle isocèle en A tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

1) a) Construire des carrés ABDE et ACFG de centre respectifs $I$ et $J$

et $\left(\overline{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) Donner les mesures des angles orientés : $\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)$ et $\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)$

2)a) Déterminer les images respectives des points $E$ et $C$ par la rotation $r$ de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

b) En déduire que : $BG=CE$

**Solution :** 1) a) Construisons les carrés ABDE et ACFG : Voir figure

b) Donnons les mesures des angles orientés : $\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)$ et $\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)$

→On a : $\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)[2\pi]$ car ABC est un triangle isocèle en A

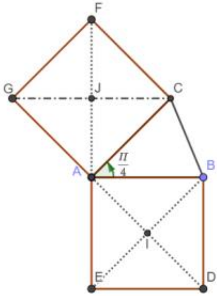
On a aussi : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et

$\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\pi[2\pi]$

D'où : $2\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)+\frac{\pi}{4}\equiv\pi[2\pi]$ c'est-à-dire :

$\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\frac{3\pi}{8}[\pi]$



2)a) Déterminons les images respectives des points $E$ et $C$ par $r$

PROF: ATMANI NAJIB

On a : $AE = AB$ et $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ car AEDB carré

Donc : $r(E) = B$

On a : $AC = AG$ et $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ car ACFG carré

Donc : $r(C) = G$

b) Déduisons que : $BG = CE$

Methode1 : On a : $r(E) = B$ et $r(C) = G$

Puisque la rotation conserve les distances alors : $BG = CE$

Methode2 : On considère le triangle : ACE d'après le théorème d'alkhashi :

$CE^2 = AE^2 + AC^2 - 2AE \times AC\cos\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC}\right)$

On a : $r(A) = A$ et$r(E) = B$ et $r(C) = G$

D'où : $AE = AB$ ; $AC = AG$ ; $EC = BG$ car la rotation conserve les distances

Et $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)$ car la rotation conserve la mesure des angles orientés

Par suite : $CE^2 = AB^2 + AG^2 - 2AB \times AG\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)$

On considère le triangle : ABG d'après le théorème d'alkhashi :

$AB^2 + AG^2 - 2AB \times AG\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right) = BG^2$

D'où : $CE^2 = BG^2$ donc : $BG = CE$

**Exercice5 :** ABCD est un parallélogramme

On construit à l'extérieur deux triangles ABE et ADF

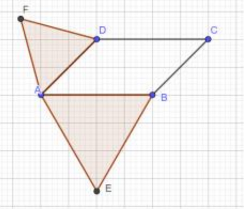
On considère la rotation $r$ de centre $E$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Et soit $C'$ l'image du point $C$ par la rotation $r$

1) Montrer que : $AC' = AF$

2) Montrer que : $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF}\right) \equiv 0[2\pi]$

3) En déduire que : $C' = F$



**Solution :** 1) On a : $r(B) = A$ et $r(C) = C'$

**Donc :** $AC' = BC$ et puisque : $AD = AF = BC$ alors $AC' = AF$

2) On a : $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}\right) + \left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC'}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et comme ; $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Alors : $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC'}\right) \equiv 0[2\pi]$

2) Puisque on a : $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC'}\right) \equiv 0[2\pi]$ et $AC' = AF$ Alors : $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AF}$ c'est-à-dire : $C' = F$

**Exercice6 :** ABCD est un carré tel que :

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ Positif et Soit $r$ la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$

Décomposer la rotation $r$ en composée de deux symétries orthogonales

**Solution :** $r = S_{(AD)} \circ S_{(AC)}$ car $(AD) \cap (AC) = \{A\}$ et $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

PROF. ATMANI NAJIB

OU $r = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ car $(AB) \cap (AC) = \{A\}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

**Exercice7 :** ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ positif

On considère les deux rotations suivantes : $r_1\left(O;\frac{\pi}{2}\right)$ et $r_2(O;-\pi)$

1) Quelle est l'image du point $A$ par la rotation : $r_2 \circ r_1$

2) Quelle est l'image du cercle $(C)$ de centre $B$ et de rayon $OA$ par la rotation $r_2 \circ r_1$

**Solution :** 1) Déterminons l'image du point $A$ par la rotation : $r_2 \circ r_1$

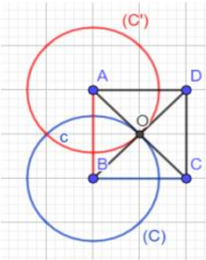
**Méthode1 :** Soit : $(r_2 \circ r_1)(A) = A''$

On a : $A'' = (r_2 \circ r_1)(A) = r_2(r_1(A))$ et on a : $r_1(A) = B$ Car : $\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

C'est-à-dire : $A'' = r_2(B)$ et on a : $r_2(B) = D$ Car : $\begin{cases} OB = OD \\ \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right) \equiv -\pi[2\pi] \end{cases}$

D'où : $(r_2 \circ r_1)(A) = D$

Par suite l'image du point $A$ par la rotation : $r_2 \circ r_1$ est $D$



**Méthode2 :** $r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre O et d'angle :

$\frac{\pi}{2} + (-\pi) = -\frac{\pi}{2}$

Donc : $r_2 \circ r_1\left(O;-\frac{\pi}{2}\right)$

$r_2 \circ r_1(A) = D$ car $\begin{cases} OA = OD \\ \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

2) Déterminons l'image du cercle $(C)$ de centre $B$ et de rayon $OA$ par la rotation $r_2 \circ r_1$

On a : $r_2 \circ r_1(B) = A$ car $\begin{cases} OB = OA \\ \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

D'où : l'image du cercle $(C)$ de centre $B$ et de rayon $OA$ par la rotation $r_2 \circ r_1$ est cercle $(C)$ de centre $A$ et de rayon $OA$

**Exercice8 :** ABCD est un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ positif et soit $r$ la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Déterminer la nature de la transformation suivante : $S_{(AD)} \circ S_{(AB)}$

2) On considère les rotations suivantes : $r\left(A;\frac{\pi}{2}\right)$ et $r'\left(B;\frac{\pi}{2}\right)$ et $r''\left(C;-\frac{\pi}{2}\right)$

Déterminer la nature des transformations suivante : $r \circ r'$ et $r \circ r''$

**Solution :**1) $S_{(AD)} \circ S_{(AB)} = r\left(A;2\frac{\pi}{2}\right) = r(A;\pi) = S_A$

PROF: ATMANI NAJIB

2) a) $r \circ r'$ on a $A \neq B$ et $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi \neq 2k\pi$ donc c'est une rotation $r\left(?;\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=r(?;\pi)$

C'est-à-dire : une symétrie centrale

Déterminons le centre de la rotation $r \circ r'$ ?

On a : $r \circ r' = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BD)} = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$

Et puisque : $(AC) \cap (BD) = \{O\}$

Alors le le centre de la rotation est le point O

2) b) $r \circ r''$ ???

on a $A \neq C$ et $\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ donc c'est une translation

Déterminons le vecteur de la translation $r \circ r''$ ?

On a : $r \circ r''(C) = r(r''(C)) = r(C) = C'$

Avec : $\begin{cases} AC = AC' \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc $r \circ r''$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{CC'}$

**Exercice9 :** ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ négatif. Soient M, N, P et Q quatre points dans le plan tels que : $\overrightarrow{DQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

La droite $(AN)$ coupe les droites $(DM)$ et $(BP)$ respectivement en E et F

La droite $(CQ)$ coupe les droites $(DM)$ et $(BP)$ respectivement en H et G

Soit $r$ la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$

1) Faire une figure dans le cas ou : $AB = 6cm$

2) Montrer que : $r(M)=N$ et $r(N)=P$ et $r(P)=Q$ et $r(Q)=M$

3) a) Montrer que : $r(F)=G$

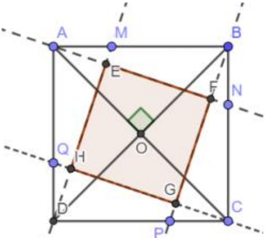
b) En déduire que : le triangle $FOG$ est isocèle et rectangle en $O$

4)a) Calculer : $(r \circ r)(F)$ et $(r \circ r)(E)$

4)b) En déduire que : les segments $[EG]$ et $[FH]$ ont le même milieu

5) Montrer que : EFGH est un carré

**Solution :** 1) Voir figure



2) on a $\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$

$\begin{cases} OB = OC \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(B)=C$

Et puisque $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors : $\overrightarrow{r(A)r(M)}=\frac{1}{3}\overrightarrow{r(A)r(B)}$ c'est à dire : $\overrightarrow{Br(M)}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et on a :

PROF: ATMANI NAJIB

$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $r(M) = N$

De meme : on montre que : $r(N) = P$ et $r(P) = Q$ et $r(Q) = M$

3) a) On montre que : $r(F) = G$ ?

Puisque : $r(N) = P$ et $r(A) = B$ alors : $r((AN)) = (BP)$

Et Puisque : $r(P) = Q$ et $r(A) = B$ alors : $r((AN)) = (BP)$

Et puisque : $r(P) = Q$ et $r(B) = C$ alors : $r((BP)) = (QC)$

Donc : $r((AN)\cap(BP)) = r((AN))\cap r((BP))$ car $r$ est une application injective

Donc : $r(\{F\}) = (BP)\cap(QC) = \{G\}$ par suite : $r(F) = G$

3)b) On a : $r(F) = G$ donc : $\begin{cases} OF = OG \\ (\overline{\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : le triangle $FOG$ est isocèle et rectangle en $O$

4)a) On a : $r(C) = D$ et $r(Q) = M$ et $r(B) = C$ donc : $r((CQ)) = (DM)$ et puisque : $r((BP)) = (QC)$

Alors : $r((CQ)\cap(BP)) = (DM)\cap(CQ)$ cad : $r(\{G\}) = \{H\}$ donc : $r(G) = H$

On a : $(r\circ r)(F) = r(r(F)) = r(G) = H$ et on a $r((AN)) = (BP)$ et $r((DM)) = (AN)$

Donc : $r((AN)\cap(DM)) = (AN)\cap(BP)$

Donc : $r(E) = F$

On a : $(r\circ r)(EF) = r(r(E)) = r(F) = G$

4)b) Puisque $r$ est une rotation d'angle : $-\pi/2$ alors : $r\circ r$ est une rotation d'angle : $2\times(-\pi/2) = -\pi$ donc $r\circ r$ est une symétrie centrale et soit K son centre

Puisque on a : $(r\circ r)(F) = H$ et $(r\circ r)(E) = G$

Alors : K est le milieu des segments $[EG]$ et $[FH]$

Donc : les segments $[EG]$ et $[FH]$ ont les mêmes milieux

4) Puisque les segments $[EG]$ et $[FH]$ ont les mêmes milieux alors : $EFGH$ est un parallélogramme et on a aussi : $r(F) = G$ et $r(E) = F$ donc : $EF = FG$ et $(\overline{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FG}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : EFGH est un carré.

**Exercice10 :** ABCD est un carré de centre O tel que : $(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \pi/2[2\pi]$. Soient I, J, K et L les milieux respectivement des segments $[AB]$ ; $[BC]$ ; $[CD]$ et $[DA]$.

1) Déterminer les mesures des angles suivants :a) $(\overline{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}})$ b) $(\overline{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}})$ c) $(\overline{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}})$ d) $(\overline{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}})$

2) Soit $S_{(AB)}$ la symétrie axiale d'axe $(AB)$

Soit $r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$ la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$ et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

PROF: ATMANI NAJIB

a) $F = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$ b) $G = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$

c) $H = r_{(D;\pi)} \circ r_{(A;\pi)}$ d) $K = r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)} \circ r_{(D;\pi)} \circ r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$

---

**Solution :**1) a) Les droites $(AC)$et$(BD)$et$(JL)$ et$(IK)$ sont des axes de symétries du carré ABCD

On a : $S_{(AC)}(A) = A$ et $S_{(AC)}(C) = C$ et $S_{(AC)}(B) = D$

Donc on déduit que : $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv -\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) On a : $S_{(LJ)}(A) = D$ et $S_{(LJ)}(C) = B$ et $S_{(LJ)}(B) = C$

Donc on déduit que : $\left(\overline{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right) \equiv -\left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Puisque la rotation conserve la mesure de l'angle orienté et on a :
$r_{(O;\pi)}(A) = C$ . $r_{(O;\pi)}(B) = D$ et $r_{(O;\pi)}(C) = A$ alors : $\left(\overline{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

d) Puisque : $\left(\overline{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ alors : $\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

2)a) $F = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$ ??

On a : $(AC) \cap (BD) = \{O\}$

Donc $F$ est le composé de deux symétries orthogonales d'axes qui se coupent en O
Donc : $F$ est rotation de centre O
Et puisque : $(AC) \perp (BD)$ alors : $F$ est une symétrie centrale de centre O ou $F = r_{(O;\pi)}$

2)b) $G = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ ??

On a : $(AB) \cap (AC) = \{A\}$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc $G$ est le composé de deux symétries orthogonales d'axes qui se coupent en A
Donc : $G$ est rotation de centre A
$G = r_{\left(O;2\frac{\pi}{4}\right)} = r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$

2)c) $H = r_{(D;\pi)} \circ r_{(A;\pi)}$ ??

Puisque toute rotation est le composé de deux symétries axiales on peut en déduire :
$r_{(D;\pi)} = S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$ et $r_{(A;\pi)} = S_{(DA)} \circ S_{(AB)}$

Donc : $H = r_{(D;\pi)} \circ r_{(A;\pi)} = S_{(DC)} \circ S_{(DA)} \circ S_{(DA)} \circ S_{(AB)}$

Et puisque : $S_{(DA)} \circ S_{(DA)} = I_P$ alors : $H = S_{(DC)} \circ S_{(AB)}$

Et puisque : $(DC) \parallel (AB)$ alors : $H$ est une translation et puisque : $A \in (AB)$ et D la projection du point

PROF: ATMANI NAJIB

D sur la droite $(DC)$ alors : $S_{(DC)} \circ S_{(AB)} = t_{2\overrightarrow{AD}}$ donc : $H = t_{2\overrightarrow{AD}}$

d) $K = r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)} \circ r_{(D;\pi)} \circ r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$ ??

Puisque toute rotation est le composé de deux symétries axiales on peut en déduire :

$r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(CA)} \circ S_{(CD)}$ et $r_{(D;\pi)} = S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$ car $\left(\overline{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Et on a : $r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(AD)} \circ S_{(AC)}$

Donc : $K = S_{(CA)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(AC)} = S_{(CA)} \circ I_P \circ I_P \circ S_{(AC)}$

Donc : $K = S_{(CA)} \circ S_{(AC)} = I_P$

**Exercice11 :** Soient A et B deux points d'n cercle $(C)$ de centre O

On considère un point M du cercle $(C)$ distinct de A et B

Les droites $(D)$ et $(D')$ sont respectivement les médiatrices des segments $[AM]$ et $[BM]$

1) Déterminer la nature de la transformation : $S_{(D')} \circ S_{(D)}$

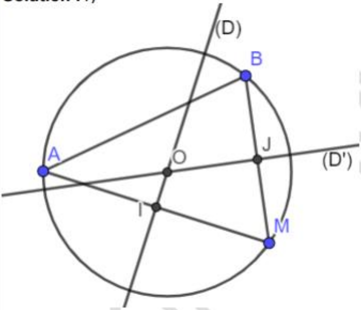
2) Déterminer la nature de la transformation : $S_{(BM)} \circ S_{(AM)}$

3) Soit G le centre de gravité du triangle ABM

On désigne par : $A'$ ; $B'$ et $M'$ les images respectives des points $A$ ; $B$ et $M$ par $S_{(D)} \circ S_{(D')}$

Déterminer $\left(S_{(D)} \circ S_{(D')}\right)(G)$

**Solution :**1)



Les droites $(D)$ et $(D')$ sont respectivement les médiatrices des segments $[AM]$ et $[BM]$

Donc : $(D) \cap (D') = \{O\}$ avec O le centre du cercle $(C)$

Donc : $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est le composé de deux symétries axiales d'axes qui se coupent en O

Donc : $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est une rotation de centre O et d'angle : $2\left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)$ avec : $I$ et $J$ sont respectivement les milieux des segments $[AM]$ et $[BM]$ et on a :

PROF ATMANI NAJIB

$\left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OJ}}\right)[2\pi]$ et puisque : le triangle OAM est isocèle en O et $(OI)$ est la médiatrice du segment $[AM]$ alors : $(OI)$ est une bissectrice de l'angle $AOM$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}}\right)[2\pi]$

De même : $\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OJ}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$

Par suite : $2\left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)[2\pi]\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$

Donc : $S_{(D')}\circ S_{(D)}$ est rotation de centre O et d'angle $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$

2) Déterminons la nature de la transformation : $S_{(BM)}\circ S_{(AM)}$

On a : $(AM)\cap(BM)=\{M\}$

Donc : $S_{(BM)}\circ S_{(AM)}$ est une rotation de centre M et d'angle : $2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$

Et puisque : $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$ est un angle inscrit associé a l'angle au centre $AOB$

Alors : $2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$

Par suite : $S_{(BM)}\circ S_{(AM)}$ est une rotation de centre M et d'angle : $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$

3)Déterminons : $\left(S_{(D)}\circ S_{(D')}\right)(G)$

Posons : $S_{(D')}\circ S_{(D)}=r$ : $r$ est la rotation de centre O et d'angle $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$

On a : $r(A)=A'$ e ;t $r(B)=B'$ et $r(M)=M'$

Et puisque : G le centre de gravité du triangle ABM et la conserve le barycentre

Alors : $r(G)=G'$ le centre de gravité du triangle $A'B'M'$

**Exercice12 :** ABC est un triangle rectangle en A tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)\equiv\alpha[2\pi]$ et $\alpha\succ0$

Soit $r$ la rotation de centre B et d'angle $\alpha$ .

1) Construire les points E et F tel que : $r(A)=E$ et $r(C)=F$

2) Montrer que $(EF)\perp(BC)$

3) Soit $(AC)\cap(EF)=\{I\}$ et $r(I)=J$

a) Montrer que les points E ; F et J sont alignés

b) Montrer que E est le milieu du segment $[IJ]$.

4)Soit $(AB)\cap(IJ)=\{K\}$ Montrer que $r(K)=C$

**Exercice13 :** ABC est un triangle équilatéral tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et O le centre de gravité du triangle ABC et I le milieu du segment $[IJ]$.

1) Déterminer une droite $(D)$ tel que : $r\left(B;-\frac{\pi}{3}\right)=S_{(D)}\circ S_{(BO)}$

2) Déterminer les droites $(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ tel que : $r\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)=S_{(\Delta_1)}\circ S_{(\Delta_2)}$

PROF: ATMANI NAJIB

3) Déterminer la nature de la transformation suivante : $S_{(AI)} \circ S_{(AB)}$

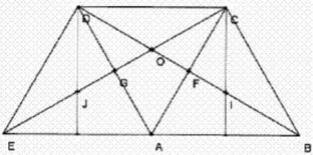
**Exercice14 :** ABC est un triangle tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et D l'image de B par symétries orthogonales d'axe $(AC)$ et E l'image de C par symétries orthogonales d'axe $(AD)$

Montrer que $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DA}\right)[2\pi]$

**Exercice15 :** ABCD est un losange de centre F tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Soient les points définis par : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$ et O le point d'intersection des droites $(BD)$ et $(CE)$

$G$ ; $I$ et $J$ sont les centres des polygones ACDE ; ABC et ADE respectivement (voir figure)



1)a) Montrer que $ACDE$ est un losange

b) Montrer que $ACD$ est un triangle équilatéral de centre O

c) Montrer que $BCE$ est un triangle rectangle en C

2)Soit $r$ la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ .

a) Montrer que : $CE = BD$

b) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CE}\right)$

c) Montrer que : $r(O) = G$ et $r^{-1}(O) = I$

d) Montrer que : $r \circ r \circ r$ est une rotation dont on déterminera son centre et son angle

3) Dans cette question on pose : : $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$ et $r'\left(C;\frac{\pi}{3}\right)$ et $r''\left(D;\frac{\pi}{3}\right)$

a) Montrer que : $r \circ r'$ est une rotation de centre O dont on déterminera son angle

b) Montrer que : $\left(r'\right)^{-1} \circ r$ est une translation dont on déterminera son vecteur
(Par exemple déterminer l'image de A)

c) Montrer que : $r \circ r' \circ r''$ est une symétrie centrale dont on déterminera son centre
(Par exemple déterminer l'image de E)

**Exercice16 :** Le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1)Construire successivement les points suivants : $A = t_{\vec{i}+\vec{j}}(O)$ ; $B = r\left(O\,;\frac{\pi}{2}\right)(A)$ ; $C = S_O(A)$

$D = S_{(AC)}(B)$ ; $I = t_{\vec{j}}(B)$ ; $J = r\left(O\,;\frac{\pi}{2}\right)(I)$ ; $K = r\left(O\,;\frac{\pi}{6}\right)(J)$; $L = r\left(K\,;\frac{3\pi}{2}\right)(J)$

2) Déterminer le centre et l'angle de la rotation $r$ dans cas suivants :

$\rightarrow r(A) = B$ et $r(B) = A$

PROF. ATMANI NAJIB

$\rightarrow r(A)=D$ et $r(K)=I$

$\rightarrow r(A)=C$ et $r(I)=J$

$\rightarrow r(D)=C$ et $r(I)=L$

$\rightarrow r(A)=D$ et $r(J)=I$

3) Déterminer la nature de la transformation suivante :

$\rightarrow S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$

$\rightarrow S_{(AB)} \circ S_{(BD)}$

$\rightarrow S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$

---

$\rightarrow S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$

$\rightarrow r\left(C\,;\frac{\pi}{2}\right) \circ r\left(D\,;\frac{\pi}{2}\right)$

$\rightarrow r\left(C\,;\frac{\pi}{4}\right) \circ r\left(C\,;\frac{3\pi}{4}\right)$

$\rightarrow r\left(B\,;\frac{3\pi}{2}\right) \circ r\left(A\,;\frac{\pi}{2}\right)$

$\rightarrow r\left(I\,;\frac{\pi}{3}\right) \circ r\left(K;\frac{\pi}{3}\right)$

**Exercice17 :** ABC est un triangle équilatéral tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et O le centre de gravité du triangle ABC

Déterminer la nature de la transformation suivante :

$\rightarrow S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$

$\rightarrow S_{(OA)} \circ S_{(OC)}$

$\rightarrow S_{(OA)} \circ S_{(BC)}$

$\rightarrow r\left(O;\frac{2\pi}{3}\right) \circ r\left(A\,;\frac{\pi}{3}\right)$

$\rightarrow r\left(C\,;\frac{\pi}{4}\right) \circ r\left(C\,;\frac{3\pi}{4}\right)$

$\rightarrow r\left(B\,;\frac{\pi}{3}\right) \circ r\left(A\,;\frac{\pi}{3}\right)$

$\rightarrow r\left(A\,;\frac{\pi}{3}\right) \circ r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$

$\rightarrow r\left(C\,;-\frac{\pi}{3}\right) \circ r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*

PROF: ATMANI NAJIB