Limite de fonctions et de suites

Corrigé du TD n° 9

Exercice 1

1. Montrer, à partir de la définition donnée en cours, que :

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

Corrigé : D'après la définition, l'énoncé « $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ » se traduit de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq \delta \Rightarrow |x^2| \leq \varepsilon$$

On souhaite montrer que cet énoncé est vrai, c'est-à-dire que, étant donné un réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que l'implication $|x| \leq \delta \Rightarrow |x^2| \leq \varepsilon$ soit vraie pour tout réel x. Pour cela, il suffit de prendre $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, d'où le résultat.

2. Même question pour :

$$\lim_{x\to 1}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 2$$

Corrigé : Comme précédemment, l'énoncé se traduit de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^*, |x-1| \leq \delta \Rightarrow \left|\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 2\right| \leq \varepsilon$$

Pour voir que cet énoncé est vrai, il faut montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ satisfaisant l'implication

$$|x-1| \leq \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 1\right| \leq \varepsilon$$

pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$. Autrement dit, il faut traduire la condition $|\frac{1}{x} - 1| \leq \varepsilon$ en une condition sur $|x-1|$. Pour cela, on procède par équivalences successives. Tout d'abord :

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon \leq \frac{1}{x} \leq 1 + \varepsilon$$

Pour simplifier, on peut supposer que $1 - \varepsilon > 0$, c'est-à-dire que $\varepsilon \in]0, 1[$. En effet, si l'on peut rendre $|\frac{1}{x} - 1|$ plus petit que toute quantité $\varepsilon \in]0, 1[$, alors on peut aussi le rendre plus petit que toute quantité $\varepsilon \geq 1$. De façon plus générale, on peut se restreindre à des valeurs suffisamment petites de ε quand on manipule la définition de limite d'une fonction en un point. Revenons à nos moutons : si l'on suppose que $1 - \varepsilon > 0$, alors

$$\begin{aligned}
1 - \varepsilon \leq \frac{1}{x} \leq 1 + \varepsilon &\Leftrightarrow \frac{1}{1+\varepsilon} \leq x \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{1+\varepsilon} - 1 \leq x - 1 \leq \frac{1}{1-\varepsilon} - 1 \\
&\Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq x - 1 \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}
\end{aligned}$$

Donc, si l'on pose $\delta = \min(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}) = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ (la plus petite des deux quantités en valeur absolue), alors la relation $|x-1| \leq \delta$ implique la relation $|\frac{1}{x} - 1| \leq \varepsilon$, ce qu'on voulait.

Exercice 2

1. Traduire par une formule mathématique (avec quantificateurs) l'affirmation

$$\lim_{x \to 0} \ln(1+x) = 0$$

Corrigé : Par définition de la limite, l'affirmation se traduit par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]-1, +\infty[, |x| \leq \delta \Rightarrow |\ln(1+x)| \leq \varepsilon$$

2. Déterminer un réel $\delta > 0$ tel que

$$|x| \leq \delta \Longrightarrow |\ln(1+x)| \leq 10^{-3}$$

Corrigé : On cherche comme d'habitude à traduire la condition $|\ln(1+x)| \leq 10^{-3}$ en une condition sur x. Nous avons

$$\begin{aligned} |\ln(1+x)| \leq 10^{-3} &\Leftrightarrow -10^{-3} \leq \ln(1+x) \leq 10^{-3} \\ &\Leftrightarrow e^{-10^{-3}} \leq 1+x \leq e^{10^{-3}} \qquad (\text{car } x \mapsto e^x \text{ est croissante}) \\ &\Leftrightarrow e^{-10^{-3}} - 1 \leq x \leq e^{10^{-3}} - 1 \end{aligned}$$

Soit $\delta = \min(e^{10^{-3}} - 1, 1 - e^{-10^{-3}})$. Alors δ satisfait bien la propriété voulue. Pour ceux qui sont curieux de connaître la valeur exacte de δ, on peut faire le raisonnement suivant : l'analyse des variations de la fonction $t \mapsto e^t + e^{-t}$ montre que celle-ci atteint son minimum en 0, donc ce minimum est égal à 2. En particulier $e^{10^{-3}} + e^{-10^{-3}} \geq 2$. On en déduit que $\delta = 1 - e^{-10^{-3}}$.

Exercice 3

a) Nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la majoration suivante

$$\left| \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1} \right| \leq \left| \frac{x}{x^2+1} \right|$$

D'autre part

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$$

donc cette quantité tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1} = 0.$$

b) Comme $\sin x$ est borné, $x - \sin x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x - \sin x} = +\infty$$

c) Pour $x > 1$, la partie entière de $\frac{1}{x}$ est nulle. Par conséquent

$$\text{pour tout } x > 1, \qquad x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0.$$

Donc la limite cherchée vaut 0.

d) Nous avons :

$$\frac{\sin(x\ln x)}{x} = \frac{\sin(x\ln x)}{x\ln x}\ln x$$

Si $x \to 0$, alors $x\ln x \to 0$. Donc par composition des limites on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x\ln x)}{x\ln x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

On en déduit que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x\ln x)}{x} = -\infty.$$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. L'allure du graphe de f a été vue en TD !
2. On note d'abord que f est continue sur l'intervalle $]-\infty, 1[$, car elle est égale sur cet intervalle à la fonction $x \mapsto x$. De même, la fonction f est continue sur les intervalles $]1, 4[$ et $]4, +\infty[$ car elle est égale à des fonctions continues sur chacun de ces intervalles. Il reste à étudier la continuité de f en 1 et en 4. En 1 nous avons :
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x = 1$$
et
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x^2 = 1$$
donc les limites à droite et à gauche de f en 1 sont égales à $f(1)$, ce qui montre que f est continue en 1. On montre de même que f est continue en 4. On en conclut que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

1. La fonction $f : x \mapsto x\lfloor x \rfloor$ n'est pas continue. En effet, $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1[$, d'où :
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 0$$
et d'autre part $f(1) = 1$, donc la limite à gauche de f en 1 n'est pas égale à $f(1)$, ce qui montre que f n'est pas continue en 1.
2. Nous allons montrer que la fonction $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor \sin(\pi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On note d'abord que g est continue sur chacun des intervalles de la forme $]n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Il reste à montrer que g est continue en chaque entier relatif. Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors
$$\lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} g(x) = (n-1) \cdot 0 = 0$$
et
$$\lim_{\substack{x \to n \\ x > n}} g(x) = n \cdot 0 = 0$$
et $g(n) = n\sin(n\pi) = 0$. Donc g a des limites à droite et à gauche en n qui sont égales à $g(n)$, ce qui montre que g est continue en n.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sin x$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Alors la suite (x_n) tend vers $+\infty$, et $\sin(x_n) = 1$ pour tout n, donc
$$f(x_n) = x_n \sin(x_n) = x_n$$
donc $f(x_n)$ tend vers $+\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = 2n\pi$. Alors la suite (y_n) tend vers $+\infty$, et $\sin(y_n) = 0$ pour tout n, donc
$$f(y_n) = y_n \sin(y_n) = 0$$
donc $f(y_n)$ tend vers 0.
3. Si la fonction f avait une limite en $+\infty$, alors (d'après le critère séquentiel) les suites $f(x_n)$ et $f(y_n)$ tendraient toutes les deux vers cette limite. Or $f(x_n)$ et $f(y_n)$ n'ont pas la même limite, donc f n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 7

On définit deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ en posant :

$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}.$$

Ces deux suites tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$. De plus

$$\cos\left(\frac{1}{u_n}\right) = \cos(2n\pi) = 1 \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{1}{v_n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0$$

Par un raisonnement semblable à celui de l'exercice précédent, on en déduit que la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

Exercice 8

a) D'après le cours, la fonction f_1 est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si elle a une limite finie en 0. Or nous avons la majoration :

$$|f_1(x)| = |\sin x||\sin 1/x| \leq |\sin x|.$$

Comme $\sin x$ tend vers 0 quand x tend vers 0, il en résulte que f_1 tend vers 0 en 0. Donc on peut prolonger f_1 par continuité en 0 en posant : $f_1(0) = 0$.

b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g(0) = 0$. La fonction f_2 s'écrit

$$f_2(x) = \frac{g(x)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

On reconnaît le taux d'accroissement de g entre 0 et x. Par conséquent, f_2 admet une limite finie en 0, égale à $g'(0)$. Calculons donc g' sur $\mathbb{R}$

$$g'(x) = \left(\ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Donc $g'(0) = 0$. Ainsi, en posant $f_2(0) = 0$ nous obtenons une fonction f_2 continue sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction f_3 est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. De plus, on calcule que :

$$f_3(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{(1+x)}.$$

On en déduit que f_3 a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1. Et donc en posant $f_3(1) = -\frac{1}{2}$, nous obtenons une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Par contre, en -1 la fonction f_3 ne peut pas être prolongée par continuité, car elle n'admet pas une limite finie en ce point. Donc f_3 n'est pas prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Soit

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}$$

1. Nous avons

$$\left|\frac{\cos x}{1 + x^2}\right| \leq \frac{1}{1 + x^2} \leq 1$$

car $|\cos x|$ est majoré par 1 et $1 + x^2$ est minoré par 1.

2. Comme la fonction f est majorée par 1, on sait que $\mathrm{Sup}_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ est inférieur ou égal à 1. D'autre part on constate que $f(0) = 1$, donc 1 est à la fois un majorant et une valeur de la fonction f. Par conséquent, $\mathrm{Sup}_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1$.

Exercice 10
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T > 0$. On suppose que f admet une limite finie (que nous noterons ℓ) quand x tend vers $+\infty$. Nous allons montrer que f est constante. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, alors la suite $x_0 + nT$ tend vers $+\infty$, donc la suite $f(x_0 + nT)$ converge vers ℓ. D'autre part, on montre par récurrence que :

$$f(x_0 + nT) = f(x_0) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

c'est-à-dire que la suite $f(x_0 + nT)$ est constante égale à $f(x_0)$. Donc $f(x_0) = \ell$. Comme ce raisonnement est valable pour n'importe quelle valeur de x_0, on en déduit que f est constante égale à ℓ.

Exercice 11
La fonction $f(x) - x$ étant bornée sur $[x_0, +\infty[$, il existe un réel M tel que

$$\forall x \geq x_0, \qquad |f(x) - x| \leq M$$

En divisant par x on trouve

$$\forall x \geq x_0, \qquad \left|\frac{f(x)}{x} - 1\right| \leq \frac{M}{x}$$

Quand on fait tendre x vers $+\infty$, $\frac{M}{x}$ tend vers 0, donc $|\frac{f(x)}{x} - 1|$ tend lui aussi vers 0, d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Exercice 12

1. On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur l'intervalle $]-1, 1[$ car elle est égale à la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur cet intervalle. De même, elle est continue sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$ car elle est égale à la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ sur ces intervalles. On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en -1 et en 1.
Calculons les limites à droite et à gauche de f en -1 :

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} ax^2 + bx + c = a - b + c = f(-1)$$

et

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \sqrt{1-x^2} = 0$$

Donc f est continue en -1 si et seulement si $a - b + c = 0$. Par un calcul semblable, on trouve que f est continue en 1 si et seulement si $a + b + c = 0$. Au final, pour que f soit continue il faut que a, b et c soient solution du système

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

Finalement, on se demande si ce système admet des solutions. En additionnant les deux équation on trouve que $a + c = 0$, en les soustrayant on trouve que $b = 0$. Donc ce système admet une infinité de solutions en prenant $b = 0$ et $a = -c$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton nous avons :

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + nx^{n-1} + x^n$$

d'où :

$$\frac{(1+x)^n - 1}{x} = n + \binom{n}{2}x + \cdots + nx^{n-2} + x^{n-1}$$

Cette quantité tend vers n quand x tend vers 0. Donc on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = n$.

Exercice 13
Soit ℓ la limite (finie) de f en x_0. Prenons $\varepsilon = 1$ dans la définition de la limite. Alors il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in D$:

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq 1$$

C'est-à-dire que

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D, \quad \ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1$$

Donc f est bornée dans le voisinage $V = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ de x_0, ce qu'on voulait.

Exercice 14

1. Il suffit de montrer que tout intervalle de la forme $]a, b[$ contient une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels. Commençons par remarquer que :
   - la somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel ;
   - la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

   On distingue à présent deux cas :

   (a) Le réel a est rationnel. Alors la suite $\left(a + \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est une suite de nombres rationnels qui décroît vers a. L'intervalle $]a, b[$ contient donc une infinité de valeurs de cette suite (plus précisément, toutes les valeurs telles que n soit strictement supérieur à la partie entière de $\frac{1}{b-a}$). De même, la suite $\left(a + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)_{n \geq 1}$ est une suite de nombres irrationnels qui décroît vers a, donc l'intervalle $]a, b[$ contient une infinité de valeurs de cette suite.

   (b) Le réel a est irrationnel. Il suffit alors de montrer l'existence d'un nombre rationnel c dans l'intervalle $]a, b[$, puis d'appliquer le résultat précédent à l'intervalle $]c, b[$. Pour montrer l'existence de c, on procède comme suit : si $b - a > 1$, alors il existe un nombre entier strictement compris entre a et b, donc c'est gagné. Dans le cas contraire, comme $b - a$ est strictement positif, on peut toujours choisir un entier $q \geq 2$ tel que $q(b - a) > 1$. Mais alors il existe un nombre entier (que l'on note p) strictement compris entre qa et qb. Il en résulte que

   $$a < \frac{p}{q} < b$$

   ce qu'on voulait.

2. En déduire que la fonction δ définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.